Incremental Unknowns and
Its Preconditioning Iterative Algorithms

增量未知元及其预处理迭代算法

王 洋 著



清华大学出版社

增量未知元及其预处理迭代算法

Incremental Unknowns and Its Preconditioning Iterative Algorithms

王　洋　著

清华大学出版社

北　京

内 容 简 介

代数方程组的高效求解是计算数学中一个基础共性且十分关键的问题。本书根据作者近几年在代数方程组求解方面研究所取得的成果以及国内外相关研究成果撰写而成。全书共 6 章，对增量未知元预处理技术、非线性特征值问题、非埃尔米特正定线性代数方程组以及非线性代数方程组的求解方法进行了系统而深入的介绍。

本书可作为信息与计算科学、数学与应用数学以及相关数学专业的研究生和高年级本科生的拓展读物，也可供相关领域从事教学与科研的专业人士参考。

图书在版编目（CIP）数据

增量未知元及其预处理迭代算法/王洋著. —北京：清华大学出版社，2019
ISBN 978-7-302-51843-3

Ⅰ. ①增…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①数值方法—迭代法　Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 284320 号

责任编辑：袁勤勇
封面设计：傅瑞学
责任校对：梁　毅
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：6.5　　**字　　数**：153 千字
版　　次：2019 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2019 年 6 月第1 次印刷
定　　价：35.00 元

产品编号：073367-01

前言

在很多科学与工程计算领域，都会遇到大规模代数方程组的求解，有效求解大规模代数方程组是科学和工程计算中的重要研究内容。

本书分为两个部分共 6 章，主要内容概述如下。

第一部分第 1～3 章首先介绍增量未知元预处理技术和近年来的 HSS 类迭代方法，然后对于非线性特征值问题，基于二阶增量未知元方法，提出修正的 Marder-Weitzner 方法；对于各项异性反应扩散方程，基于矩阵分块，提出一种新的类小波增量未知元(WIU)，这里包含了作者的一些研究成果。

第二部分第 4～6 章研究几种增量未知元预处理迭代算法。第 4 章对非埃尔米特正定线性代数方程组的数值解法进行研究，基于 NSS 迭代方法，提出预处理 NSS 方法和双参数 NSS 方法，并对方法的收敛性进行细致的分析，给出迭代格式中迭代参数的计算方法。第 5 章首先介绍复对称线性代数方程组的迭代解法，提出基于 SOR 迭代的复对称线性系统的 MHSS 加速方法，分析迭代格式的收敛性，并以数值结果证明方法的优越性。第 6 章研究非线性代数方程组的数值解法，基于 LHSS 方法提出 Newton-LHSS 后退方法并分析方法的全局收敛性，对于一类特殊的弱非线性代数方程组，提出 Picard-AHSS 迭代方法、非线性 AHSS-like 迭代方法以及 Picard-MHSS 方法，分析方法的收敛性，并给出数值结果。

本书多数为作者的研究成果，在相关问题中参考了伍渝江教授近几年的研究资料，在此表示感谢。

由于作者的学识与研究水平有限，研究领域与视角不够宽阔，书中一定有很多不尽如人意的地方，敬请相关专家和读者指正。

作　者

2018 年 3 月

目录

第 1 章　引言 …… 1

1.1　增量未知元方法与微分方程数值解 …… 1

1.1.1　一阶增量未知元 …… 1

1.1.2　二阶增量未知元 …… 2

1.1.3　类小波增量未知元 …… 6

1.2　数值代数方法 …… 7

1.3　本书的主要工作 …… 11

第 2 章　基于增量未知元方法的非线性特征值问题的研究 …… 13

2.1　非线性特征值问题简介 …… 13

2.2　线性 Richardson 方法和 Marder-Weitzner 方法 …… 14

2.2.1　线性 Richardson 方法 …… 14

2.2.2　Marder-Weitzner 方法 …… 14

2.3　Marder-Weitzner 方法的改进 …… 15

2.3.1　修正的 Richardson 方法 …… 15

2.3.2　修正的 Marder-Weitzner 方法 …… 15

2.3.3　A1 方法 …… 17

2.4　数值实验 …… 18

2.4.1　Dirichlet 问题 …… 18

2.4.2　非线性特征值问题 …… 18

2.4.3　结论 …… 24

第 3 章　一类反应扩散方程的多层分块类小波增量未知元 …… 25

3.1　多层分块类小波增量未知元 …… 25

3.2　逼近格式及其等价形式 …… 29

3.3　关于范数的三个引理 …… 33

3.4　显格式和半隐格式的稳定性估计 …… 33

3.5　数值结果 …… 37

第 4 章 非埃尔米特正定线性系统的迭代方法 …… 40

4.1 简介 …… 40
4.2 非埃尔米特正定线性系统的预条件 NSS 方法 …… 41
4.2.1 预条件件正规/反对称分裂(PNSS)迭代方法的建立 …… 41
4.2.2 PNSS 迭代方法收敛性分析 …… 41
4.2.3 不精确的预条件件正规/反对称分裂(IPNSS)迭代及其收敛性分析 …… 43
4.2.4 数值算例 …… 44
4.2.5 总结 …… 46
4.3 非埃尔米特正定线性系统的两参数预处理 NSS 迭代方法 …… 46
4.3.1 两参数预处理 NSS 迭代方法的建立 …… 46
4.3.2 两参数预处理 NSS 迭代方法收敛性分析 …… 47
4.3.3 最优化策略 …… 50
4.3.4 不精确两参数预处理 NSS 迭代策略 …… 54
4.3.5 数值算例 …… 55

第 5 章 基于 SOR 迭代的复对称线性系统的 MHSS 加速方法 …… 60

5.1 简介 …… 60
5.2 MHSS 迭代方法 …… 61
5.3 基于 SOR 迭代的 MHSS 加速方法 …… 62
5.3.1 MHSS 加速方法的建立 …… 62
5.3.2 MHSS 加速方法收敛性的证明 …… 64
5.3.3 数值实验 …… 65
5.3.4 总结 …… 65

第 6 章 非线性系统的迭代法 …… 66

6.1 简介 …… 66
6.2 关于 Newton-LHSS 后退方法及其全局收敛性的研究 …… 67
6.2.1 Newton-LHSS 后退方法的提出 …… 67
6.2.2 Newton-LHSS 后退方法的全局收敛性定理 …… 68
6.2.3 数值实验 …… 69
6.3 Picard-AHSS 方法及其局部收敛定理 …… 72
6.3.1 AHSS 方法 …… 73
6.3.2 Picard-AHSS 方法 …… 73
6.3.3 Picard-AHSS 方法收敛定理 …… 74
6.3.4 非线性 AHSS-like 迭代方法及其收敛性定理 …… 76

6.3.5 数值结果 …… 78
6.4 一类弱非线性方程组的 Picard-MHSS 迭代方法 …… 81
6.4.1 Picard-MHSS 方法及其局部收敛定理 …… 81
6.4.2 非线性 MHSS-like 迭代方法及其收敛定理 …… 84
6.4.3 数值结果 …… 86
参考文献 …… 89

第 1 章 引 言

1.1 增量未知元方法与微分方程数值解

许多物理运动都可以用一个偏微分方程的定解问题描述,例如无限长弦的自由振动问题可归结成二阶双曲型偏微分方程的初值问题,而弦对平衡位置的偏移就是方程的解.但是绝大多数偏微分方程定解问题的解不能用公式表达,有时即使可以用公式表示,也往往过于复杂,只能用各种近似方法计算它的解.

有限差分方法是求解偏微分方程定解问题的常用近似方法之一. 自从 Courant, Friedrichs,Lewy(1928 年) 提出偏微分方程的有限差分方法以来,已有很多人对此做了大量研究. 尤其是当代高性能电子计算机和数学软件的高度发达,促使偏微分方程数值解的研究蓬勃发展. 本书研究的是偏微分方程数值解领域中一类现代数值方法——基于有限差分的增量未知元方法,并用于求解各类线性和非线性方程组.

对于许多问题的数值计算,例如湍流问题,经常会遇到大规模线性方程组的求解. 它的三维情形包含几十亿的未知元,如果将所有的未知元不加区分,即对于占有绝大部分能量的大波长部分和能量很小的小波长部分用同样的方法处理,会花费同样的计算时间,这是很不科学,也是很不合理的. 对于谱方法,运用 Fourier 展开,可以将这两部分自然分开. 但对于有限差分,并没有这种好的性质. 为了克服这一困难,基于近似惯性流形理论,Temam 首次提出了增量未知元(Incremental Unknowns,IU)方法. 该方法在求解线性椭圆问题时,可以看成是相应系统的预条件子,即将求解线性系统 $\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{b}$ 转化为求解线性系统$\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{u}}=\bar{\boldsymbol{b}}$,其中 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, $\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$. 这里,$\boldsymbol{S}$ 表示增量未知元到结点未知元(按字典顺序排列)的转换矩阵,即$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{u}}$. 已有大量事实表明,IU 可以有效降低线性系统系数矩阵的条件数,并且对于线性系统的求解,其效率与多重网格方法相当. 基于上述优点,以及它的容易实施,所以在其提出之后的这些年有了长足的发展. 许多学者使用 IU 方法求解各种不同的方程,并且将 IU 与其他迭代算法相结合,以获得更高效的算法. 下面着重介绍两种增量未知元:二阶增量未知元和类小波增量未知元.

1.1.1 一阶增量未知元

设 $\Omega=[0,1]^2$,$h=\dfrac{1}{2N}$,$N\in\mathbf{N}$ 为细网格步长,$2h$ 为粗网格步长,微分方程为 Dirichlet 边界条件,$\boldsymbol{U}$ 表示结点未知元,其元素为 $u_{\alpha,\beta}$, $1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2N-1$,一阶增量未知元 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$定义

如下：

定义 1.1 增量未知元 $\widetilde{U}$ 包含 $y_{2i,2j}, z_{2i+1,2j}, z_{2i,2j+1}, z_{2i+1,2j+1}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant N-1)$ 四类元素，其中，

$$\begin{cases} y_{2i,2j} = u_{2i,2j} \\ z_{2i,2j+1} = u_{2i,2j+1} - u_{2i,2j} \\ z_{2i+1,2j} = u_{2i+1,2j} - u_{2i,2j} \\ z_{2i+1,2j+1} = u_{2i+1,2j+1} - u_{2i,2j} \end{cases}$$

由于 $z_{i,j}$ 为 $u_{i,j}$ 在其某些相邻点的增量，所以称 $\widetilde{U}$ 为增量未知元，在定义 1.1 下，$z_{i,j}$ 为 $u_{i,j}$ 在其两个相邻点处的增量，利用 Taylor 公式，可以算出在细网格点 (α,β) 处，$z_{\alpha,\beta} = O(h)$，因此，我们称 $\widetilde{U}$ 为一阶增量未知元.

1.1.2 二阶增量未知元

1. 一维情形

设 $\Omega = [0,1]$，$h = \dfrac{1}{2N}$，$N \in \mathbf{N}$ 为细网格步长，$2h$ 为粗网格步长，见图 1.1.

$$\cdot \quad \circ \quad \times \quad \circ \quad \times \quad \circ \quad \times \quad \circ \quad \cdot$$

图 1.1 一维区域 Ω 的剖分：× 表示粗网格点，∘ 表示细网格点

假设微分方程为 Dirichlet 边界条件，$\mathbf{U}$ 表示结点未知元，其元素为 u_α，$1 \leqslant \alpha \leqslant 2N-1$，一维二阶增量未知元 $\widetilde{U}$ 定义如下：

定义 1.2 一维二阶增量未知元 $\widetilde{U}$ 包含 y_{2i}, z_{2i+1} $(1 \leqslant i \leqslant N-1)$ 两类元素，其中，

$$\begin{cases} y_{2i} = u_{2i} \\ z_{2i+1} = u_{2i+1} - \dfrac{1}{2}(u_{2i+2} + u_{2i}) \end{cases}$$

利用 Taylor 公式，可以算出在细网格点 α 处，$z_\alpha = O(h^2)$，因此，称 $\widetilde{U}$ 为二阶增量未知元. 下面，以一维 Dirichlet 问题的数值求解问题为例，给出细网格上的结点未知元与增量未知元之间的转换关系.

考虑一维 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -u'' = f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

利用中心差分格式将其进行离散，得到

$$\begin{cases} 2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} = h^2 f_j, \quad j = 1,2,\cdots,2N-1 \\ u_0 = u_{2N} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，$f_j = f(jh)$. 令 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{2N-1}$ 为 $u_j, h^2 f_j$ $(j=1,2,\cdots,2N-1)$ 为按字典顺序排列成的列向量，则式(1.2)等价于线性方程组

$$\boldsymbol{AU} = \boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 为 $(2N-1)\times(2N-1)$ 三对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

记 $\bar{\boldsymbol{U}}$ 表示 $\boldsymbol{U}$ 中元素按偶指标、奇指标排序后的近似解,即

$$\bar{\boldsymbol{U}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{U}_f\end{pmatrix}$$

这时,存在排序矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{U}}$.

这里,$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{E}_1 \quad \boldsymbol{E}_2)$,其中,

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2N-1)\times(2N-1)} \qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2N-1)\times N} \tag{1.4}$$

因而,有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

令

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},\quad \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

从而得到另一线性方程组

$$\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{U}}=\bar{\boldsymbol{b}} \tag{1.5}$$

又记

$$\tilde{\boldsymbol{U}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z}_f\end{pmatrix}$$

由一维增量未知元的定义可知

$$\bar{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{U}}$$

这里,

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{N-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{G} & \boldsymbol{I}_N\end{pmatrix}$$

其中,

$$G=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \ddots & \\ & \ddots & \frac{1}{2} \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

为 $N\times(N-1)$ 矩阵. 于是,线性方程组(1.5)又变成

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{U}}=\bar{\boldsymbol{b}},\quad \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}}$$

最终,我们有 $\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{U}}=\widetilde{\boldsymbol{b}}$,其中,

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S},\quad \widetilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}}$$

这里 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是对称正定矩阵,可以采用共轭梯度法进行求解.

2. 二维情形

设 $\Omega=[0,1]^2$,$h=\frac{1}{2N}$ 为细网格步长,$2h$ 为粗网格步长,见图 1.2.

设微分方程为 Dirichlet 边界条件,$\boldsymbol{U}$ 表示结点未知元,其元素为 $u_{\alpha,\beta}$,$1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2N-1$,二维二阶增量未知元 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ 定义如下:

定义 1.3 增量未知元 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ 包含 $y_{2i,2j}$,$z_{2i+1,2j}$,$z_{2i,2j+1}$,$z_{2i+1,2j+1}$ $(1\leqslant i,j\leqslant N-1)$ 四类元素,其中,

$$\begin{cases} y_{2i,2j}=u_{2i,2j} \\ z_{2i,2j+1}=u_{2i,2j+1}-\frac{1}{2}(u_{2i,2j+2}+u_{2i,2j}) \\ z_{2i+1,2j}=u_{2i+1,2j}-\frac{1}{2}(u_{2i+2,2j}+u_{2i,2j}) \\ z_{2i+1,2j+1}=u_{2i+1,2j+1}-\frac{1}{4}(u_{2i+2,2j}+u_{2i,2j}+u_{2i,2j+2}+u_{2i+2,2j+2}) \end{cases}\tag{1.6}$$

若记网格点 $(2ih,(2j+1)h)$ 为 F1 型细网格点,$((2i+1)h,2jh)$ 为 F2 型细网格点,$((2i+1)h,(2j+1)h)$ 为 F3 型细网格点,则三种细网格点的类型见图 1.3.

图 1.2 二维区域 Ω 的剖分:× 表示粗网格点,∘ 表示细网格点

F1 型　F2 型　F3 型

图 1.3 细网格点的类型

这里需要指出的是，由于微分方程为 Dirichlet 边界条件，因此，若 $\alpha=0$ 或 $2N$，$\beta=0$ 或 $2N$，则 $u_{\alpha,\beta}=0$.

下面，以二维 Dirichlet 问题的数值求解问题为例，给出细网格上的所有结点未知元与增量未知元之间的关系.

考虑二维 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

这里，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，取 $f(x,y)=2(x+y-x^2-y^2)$. 利用五点中心差分格式将其进行离散，得到

$$\begin{cases} 4u_{i,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} = h^2 f_{i,j}, i,j = 1,2,\cdots,2N-1 \\ u_{0,j} = u_{2N,j} = 0, \quad u_{i,0} = u_{i,2N} = 0, i,j = 1,2,\cdots,2N-1 \end{cases} \tag{1.8}$$

其中，$f_{i,j}=f(ih,jh)$. 设 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^{(2N-1)^2}$ 表示 $u_{i,j}$，$h^2 f_{i,j}$ $(i,j=1,2,\cdots,2N-1)$ 按自然顺序(从左往右，从下往上)排列成列向量，则式(1.8)等价于线性方程组

$$\boldsymbol{AU} = \boldsymbol{b} \tag{1.9}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $(2N-1)^2\times(2N-1)^2$ 矩阵，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{I} & & & & \\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{I} & & & \\ & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{I} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C} & -\boldsymbol{I} \\ & & & & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$$

这里，$\boldsymbol{I}$ 为 $(2N-1)\times(2N-1)$ 单位矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $(2N-1)\times(2N-1)$ 三对角矩阵：

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

记 $\bar{\boldsymbol{U}}$ 表示 $\boldsymbol{U}$ 中元素按粗网格点、F1 型、F2 型、F3 型细网格点顺序排序后的近似解，即

$$\bar{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{U}_f \end{pmatrix}$$

这时，存在排序矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{U}}$$

这里，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_1 \quad \boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{E}_1 \quad \boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_2 \quad \boldsymbol{E}_2\otimes\boldsymbol{E}_2)$，$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ 同式(1.4)，因而有

$$\boldsymbol{AP}\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\bar{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

令 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$，$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，从而得到另一线性方程组

$$\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{U}} = \bar{\boldsymbol{b}} \tag{1.10}$$

又记 $\widetilde{\boldsymbol{U}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z}_f\end{pmatrix}$，由定义 1.3 可知

$$\bar{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{U}}$$

这里，

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{(N-1)^2\times(N-1)^2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{G}_{N\times(N-1)}\otimes\boldsymbol{I}_{N-1} & \boldsymbol{I}_{N(N-1)\times N(N-1)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{I}_{N-1}\otimes\boldsymbol{G}_{N\times(N-1)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{N(N-1)\times N(N-1)} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{G}\otimes\boldsymbol{G}_{N\times(N-1)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{N^2\times N^2}\end{pmatrix}$$

于是，线性方程组(1.10)又变成

$$\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{U}}=\bar{\boldsymbol{b}},\quad \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{U}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}}$$

最终，有

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{U}}=\widetilde{\boldsymbol{b}} \tag{1.11}$$

其中，$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}$，$\widetilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{b}}$.

1.1.3 类小波增量未知元

类小波增量未知元(Wavelet-like Incremental Unknowns，WIU)由 Temam 首次提出. 与上述一阶、二阶增量未知元所不同的是，WIU 可以将近似解空间分成两个 L^2 正交子空间，使得在求解微分方程的过程中能够自动消掉一些项，大大简化了计算. 理论分析表明，基于 WIU 的数值格式的稳定性条件，要明显好于标准算法的稳定性. 下面，我们给出在一维、二维情形下 WIU 的定义.

1. 一维情形

设 $\Omega=[0,1]$，$h=\dfrac{1}{2N+1}$，$N\in\mathbf{N}$ 为细网格步长，$2h$ 为粗网格步长. 一维类小波增量未知元定义如下.

定义 1.4 类小波增量未知元 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ 包含 y_{2i}，z_{2i+1} $(1\leqslant i\leqslant N-1)$两类元素，其中，

$$\begin{cases} y_{2i}=\dfrac{1}{2}(u_{2i-1}+u_{2i}) \\ z_{2i+1}=\dfrac{1}{2}(u_{2i-1}-u_{2i}) \end{cases} \tag{1.12}$$

2. 二维情形

设 $\Omega=[0,1]^2$，$h=\dfrac{1}{2N+1}$，$N\in\mathbf{N}$ 为细网格步长，$2h$ 为粗网格步长，二维类小波增量未知元定义如下.

定义 1.5 二维类小波增量未知元 $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ 包含 $y_{2i,2j}$，$z_{2i-1,2j}$，$z_{2i,2j-1}$，$z_{2i-1,2j-1}$ $(1\leqslant i,j\leqslant N)$四类元素，其中

$$
\begin{cases}
y_{2i,2j} = \frac{1}{4}(u_{2i,2j} + u_{2i-1,2j} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}) \\
z_{2i-1,2j} = u_{2i-1,2j} - y_{2i,2j} = \frac{1}{4}(3u_{2i-1,2j} - u_{2i,2j} - u_{2i,2j-1} - u_{2i-1,2j-1}) \\
z_{2i,2j-1} = u_{2i,2j-1} - y_{2i,2j} = \frac{1}{4}(3u_{2i,2j-1} - u_{2i,2j} - u_{2i-1,2j} - u_{2i-1,2j-1}) \\
z_{2i-1,2j-1} = u_{2i-1,2j-1} - y_{2i,2j} = \frac{1}{4}(3u_{2i-1,2j-1} - u_{2i,2j} - u_{2i-1,2j} - u_{2i,2j-1})
\end{cases} \tag{1.13}
$$

由定义 1.5，对于 $1 \leqslant i,j \leqslant N$，可以得出结点未知元和增量未知元的转换关系为

$$
\begin{cases}
u_{2i,2j} = y_{2i,2j} - z_{2i-1,2j} - z_{2i,2j-1} - z_{2i-1,2j-1} \\
u_{2i-1,2j} = y_{2i,2j} + z_{2i-1,2j} \\
u_{2i,2j-1} = y_{2i,2j} + z_{2i,2j-1} \\
u_{2i-1,2j-1} = y_{2i,2j} + z_{2i-1,2j-1}
\end{cases}
$$

以上三种增量未知元方法均为对区域 Ω 进行二层离散. 若对求解区域进行多层离散，可以类似地给出三维情形下二阶增量未知元的定义和转换矩阵结构.

1.2　数值代数方法

科学与工程计算的许多重要领域，如流体力学计算、材料模拟与设计、电磁场计算、电力系统的优化设计、数值天气预报及核爆数值模拟等都离不开微分方程的求解，而求解微分方程可以通过有限体积、有限元或有限差分法等对微分方程进行离散，化为求解非线性方程组或稀疏线性方程组. 非线性方程组的求解又可通过 Newton 迭代或简单迭代等线性化，化为稀疏线性代数方程组的求解. 因此，稀疏线性代数方程组的高效求解是计算数学中十分重要的课题之一.

目前，对于线性代数方程组的求解方法一般分为两类：直接法和迭代法. 直接法的工作主要集中在 20 世纪六七十年代，直接法需要对系数矩阵进行分解，在不计舍入误差的情况下经过有限次运算后可求得方程组的精确解. 因此，直接法又称为精确法. 对于一些中小型线性代数系统，常选用直接法求解. 在实际应用中，直接法具有高精度性、稳定性和可操作性，从而使得人们在很长时间内都倾向于使用直接法求解线性代数系统. 但是人们逐渐发现，当线性代数系统中系数矩阵的条件数很大时，舍入误差就会影响求解的准确性，求得的解往往与精确解相差甚远. 另外由于存储的问题，直接法需要耗费大量的计算时间和存储空间，计算效率非常不理想.

迭代法是从 20 世纪后半叶开始逐步发展起来的. 最早提到迭代法的是 Gauss，事实上，Gauss 意识到在实际计算中当变量数很大时，直接法是很难完成的. 1823 年，他在给 Gerling 的一封信中很兴奋地向其推荐一种自修正算法迭代算法，他描述说，对于这种非直接法迭代法，人们甚至可以在半睡半醒或考虑其他问题时完成. 此算法后来又被 Seidel 于 1879 年独立发现，这就是后来闻名于世的 Gauss-Seidel 迭代法.

迭代法是采用逐次逼近的方法，从一个初始向量出发，按照一定的计算格式，迭代计算出逼近未知向量的无穷序列，序列极限就是线性代数系统的精确解. 迭代法通常在经

过较少的迭代步数之后就可以获得非常精确的近似解,从而在整个问题求解过程中大大减少了迭代求解时间并降低了迭代求解代价,尤其是迭代法具有充分利用系数矩阵稀疏性的潜力,只需知道系数矩阵与向量乘积的计算法则就能求解相应的线性方程组,这是直接法无法比拟的. 因此,随着计算机的出现和计算机技术的快速发展,迭代法与直接法相比具有更广泛的应用空间和优越性.

目前常见的迭代法有定常迭代法和非定常迭代法. 对于定常迭代法,最常见的是单分裂迭代法,它是由系数矩阵的分裂

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$$

导出的迭代法:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 称为迭代矩阵;$\boldsymbol{x}^{(0)}$ 称为迭代初始向量,对 $\boldsymbol{M}$ 取不同的值就会得到不同的迭代算法,例如,Jacobi,Gauss-Seidel,SOR,SSOR 等经典迭代法. 定常迭代法形式简单、易于操作,Varga 和 Young 在相关文献中对此进行了详细的论述. 从这些迭代法经典著作中可以清楚地看到,迭代矩阵的选取对于迭代法的收敛性具有决定性作用,只有当所选迭代矩阵的谱半径小于 1 时,才能保证迭代法收敛,而且迭代矩阵的谱半径越小,迭代收敛速度就越快. 因此,对于同一个线性代数系统,可以通过比较迭代矩阵谱半径的大小来判断不同迭代方法收敛的速度,进而为迭代方法的选择提供依据. 非定常迭代法的典型代表是子空间法,主要包括 Conjugate Gradient (CG)、Minimal Residual method (MINRES)、Generalized Minimal Residual method(RMRES)、BiCGStab 等迭代法. 非定常迭代法的收敛速度依赖于系数矩阵的谱分布,分布越集中,收敛速度越快. 但当谱分布很分散时,一般收敛速度很慢,甚至不收敛,在此种情况下,可以对线性代数系统采用预处理技术使系数矩阵谱聚集. 预处理技术是解决该收敛性问题的有效途径,成为迭代法研究中热点问题之一.

目前,对于基于矩阵分裂的定常迭代法虽然直接的应用比较少,但是结合其他方法的应用还是很多的,而且在理论上有重要的意义. 这里,主要介绍近几年,白中治和 Golub 等提出的 HSS 类迭代方法.

1. HSS 迭代方法

考虑下列大型稀疏线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1.14}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为大型稀疏矩阵,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in\mathbf{C}^{n}$.

求解式(1.14)的迭代方法有很多,例如经典的 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代方法. 基于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对称/反对称分裂,即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{S}$$

其中 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{*})$,$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{*})$,白中治和 Golub 等提出了对称/反对称分裂(Hermitian/skew-Hermitian Splitting,HSS)方法.

HSS 迭代方法: 给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^{n}$,对于 $k=0,1,2,\cdots$,直到 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛,计算

$$\begin{cases}(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\\(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}\end{cases} \tag{1.15}$$

其中 $\alpha>0$.

关于 HSS 迭代方法的收敛性,有下述定理.

定理 1.1　令 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正定矩阵,$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$,$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)$ 分别是它的 Hermite 部分和反 Hermite 部分,α 是一个给定的正数,则 HSS 迭代方法的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha)$可以写成

$$\boldsymbol{M}(\alpha)=(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})$$

它的谱半径满足下面的不等式

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\sigma(\alpha)<1$$

其中,$\sigma(\alpha)=\max\limits_{\lambda_i\in\lambda(\boldsymbol{H})}\left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|$,$\lambda(\boldsymbol{H})$是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的谱集. 即对 $\alpha>0$,HSS 迭代方法收敛到线性方程组(1.14)的唯一解 $\boldsymbol{x}^*\in \mathbf{C}^{n\times n}$.

定理 1.1 说明了 HSS 收敛速度以 $\sigma(\alpha)$ 为上界,而 $\sigma(\alpha)$只与系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 部分 $\boldsymbol{H}$ 的特征值有关,而与 $\boldsymbol{A}$ 的反 Hermite 部分 $\boldsymbol{S}$ 的特征值以及矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{S}$ 的特征向量无关. 对于迭代方法中参数 α 的计算方法,有下面的定理:

定理 1.2　令 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正定矩阵,$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$,$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)$分别是它的 Hermite 部分和反 Hermite 部分,α 是一个给定的正数,$\gamma_{\max}$ 和 $\gamma_{\min}$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的最大和最小特征值,则

$$\alpha^*\equiv\arg\min_{\alpha}\left\{\max_{\gamma_{\min}<\lambda<\gamma_{\max}}\left|\frac{\alpha-\lambda}{\alpha+\lambda}\right|\right\}=\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}$$

且

$$\sigma(\alpha^*)=\frac{\sqrt{\gamma_{\max}}-\sqrt{\gamma_{\min}}}{\sqrt{\gamma_{\max}}+\sqrt{\gamma_{\min}}}=\frac{\sqrt{\kappa(\boldsymbol{H})}-1}{\sqrt{\kappa(\boldsymbol{H})}+1}$$

其中,$\kappa(\boldsymbol{H})$是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的条件数.

2. NSS 迭代方法

利用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正规/反对称分裂(Normal/skew-Hermitian Splitting,NSS),将 HSS 方法进一步推广,即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$$

其中,$\boldsymbol{N}\in \mathbf{C}^{n\times n}$为正规矩阵,$\boldsymbol{S}\in \mathbf{C}^{n\times n}$为反对称矩阵,得到了 NSS 方法.

NSS 迭代方法:给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in \mathbf{C}^n$,对于 $k=0,1,2,\cdots$,直到$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛,计算

$$\begin{cases}(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\\(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}\end{cases} \tag{1.16}$$

其中,$\alpha>0$,$\boldsymbol{N}\in \mathbf{C}^{n\times n}$为正规矩阵,$\boldsymbol{S}\in \mathbf{C}^{n\times n}$为反对称矩阵.

关于 NSS 迭代方法的收敛性,有下述定理.

定理 1.3　令 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正定矩阵，$\boldsymbol{N}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正规矩阵，$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个反对称矩阵，并且满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$. Θ_1 为 $\boldsymbol{N}$ 特征值的集合. α 是一个正常数. 此时 NSS 方法迭代矩阵的谱半径满足下面的不等式：

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\sigma(\alpha)<1,\quad\forall\alpha>0 \tag{1.17}$$

其中，

$$\sigma(\alpha)=\max_{\lambda_j\in\Theta_1}\frac{|\alpha-\lambda_j|}{|\alpha+\lambda_j|}=\max_{\gamma_j+\mathrm{i}\eta_j\in\Theta_1}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma_j)^2+\eta_j^2}{(\alpha+\gamma_j)^2+\eta_j^2}} \tag{1.18}$$

这里，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 即由 NSS 方法得到的迭代序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛到线性方程组(1.14)的解 $\boldsymbol{x}^*$. 除此之外，令 $\gamma_{\min}$ 和 $\gamma_{\max}$，$\eta_{\min}$ 和 $\eta_{\max}$ 分别表示 $\boldsymbol{N}$ 的特征值实部绝对值的最小值和最大值，虚部绝对值的最小值和最大值，$\Omega=[\gamma_{\min},\gamma_{\max}]\times[\eta_{\min},\eta_{\max}]$，有

$$\alpha^*\equiv\operatorname*{argmin}_{\alpha}\left\{\max_{(\gamma_j,\eta_j)\in\Omega}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma_j)^2+\eta_j^2}{(\alpha+\gamma_j)^2+\eta_j^2}}\right\}=\begin{cases}\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}, & \eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\\ \sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}, & \eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\end{cases} \tag{1.19}$$

相应地，

$$\sigma(\alpha^*)=\begin{cases}\left(\dfrac{\gamma_{\min}+\gamma_{\max}-2\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}}{\gamma_{\min}+\gamma_{\max}+2\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\\ \left(\dfrac{\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}-\gamma_{\min}}{\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}+\gamma_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\end{cases} \tag{1.20}$$

定理 1.3 说明了 $\sigma(\alpha)$ 只与正规矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的特征值有关，而与 $\boldsymbol{A}$ 的反 Hermite 部分 $\boldsymbol{S}$ 的特征值以及矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{S}$ 的特征向量无关.

3. AHSS 迭代方法

2004 年，白中治等提出一种预处理 HSS (PHSS)迭代法用于数值求解 Hermite 半正定线性鞍点系统. 2007 年，为了提高 PHSS 迭代法的收敛速度，他们在 HSS 方法中引入双参数，用来求解鞍点问题，称为加速 HSS(AHSS)迭代法.

AHSS 迭代方法：给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛，计算

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\\ (\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}\end{cases}$$

其中 α，β 为给定正数，$\boldsymbol{I}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵.

当矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为非 Hermite 正定矩阵时，可以证明，若 α，β 满足一定的条件，AHSS 方法的迭代矩阵的谱半径小于 1. 杨爱利和伍渝江等对该方法的收敛性进行了更加细致的讨论，并详细给出了两个参数的计算方法. 数值实验证明，AHSS 方法较 HSS 方法更加有效和稳健.

4. LHSS 迭代方法

Li 等在 2007 年基于 HSS 格式提出一种偏向一侧的 HSS (LHSS)迭代法，其定义

如下.

LHSS 迭代方法：给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} = -\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b} \\ (\alpha\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)} + \boldsymbol{b} \end{cases} \tag{1.21}$$

其中 α 为给定的正常数. Li 给出了 LHSS 方法的收敛定理和参数 α 的计算方法，并证明在一定条件下，LHSS 方法的谱半径的上界小于 HSS 方法谱半径的上界.

HSS 类方法也可以用来求解非线性代数方程组. 2010 年，白中治等利用 HSS 迭代方法求解 Newton 方程组，提出了 Newton-HSS 方法，大量数值实验证明了 Newton-HSS 方法在迭代步数和 CPU 时间上都要优于 Newton-USOR、Newton-GMRES 以及 Newton-GCG 方法. 2011 年，郭学萍等分析了不精确 Newton-HSS 方法的半局部收敛性，并通过引入向后线搜索技术，给出了全局收敛的不精确 Newton-HSS 方法. 除此之外，对于弱非线性代数方程组，为了进一步提高 Newton-HSS 方法的求解速度，白中治等利用 Picard 迭代作为外迭代，HSS 方法作为内迭代，提出了求解弱非线性代数方程组的 Picard-HSS 和非线性 HSS-like 迭代方法，这两类方法在计算的过程中均不需要在当前迭代步 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 处计算和形成 Jacobi 矩阵，且在内迭代 HSS 方法中出现的两个子线性代数方程组的系数矩阵不随迭代步数的变化而变化. 因此，与 Newton-HSS 方法相比，这两类方法大大减少了算法的工作量，提高了问题的求解速度. 这期间，很多博士研究生的毕业论文也对非线性方程组的解法进行了大量的研究，对数值代数理论的发展起到了一定的促进作用.

1.3　本书的主要工作

本书主要包含以下两方面的工作.

第一部分是对二阶增量未知元和类小波增量未知元预处理方法的研究.

对于非线性特征值问题，结合二阶增量未知元方法和 Marder-Weitzner 算法，提出了 4 种修正的 Marder-Weitzner 算法，给出了算法的收敛性分析，数值实验证明了新算法的正确性和有效性. 对于各向异性的反应扩散方程，因为导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 项含有非常小的参数，通常使用类小波增量未知元(WIU)求解这类方程不是特别有效. 因此，本书提出了一种基于矩阵分块的新的增量未知元：分块类小波增量未知元(WBIU). WBIU 一方面保持 WIU 的优点，通过将近似解空间分解成两个 L^2 正交子空间来自动消掉有限差分离散等价方程组的一些项，以简化计算. 另一方面，新的分块类小波增量未知元仅在一个方向(系数较大的方向)引入 WIU，因此与一维的 WIU 类似，这样可以有效地减少系数矩阵的条件数，节省求解的时间. 除此之外，本书还建立了新的范数估计，给出两种 WBIU 型数值格式：显格式和半隐格式，并证明了在新的范数估计下，格式是稳定的. 最后，用数值算例对理论分析进行了验证.

第二部分研究了几种增量未知元预处理迭代算法.

首先，提出了大型稀疏非 Hermite 正定线性方程组的预处理 NSS 迭代方法，然后在该方法的基础上，引入双参数，提出了两参数预处理 NSS 迭代方法. 理论分析表明，在一定条件下，新的迭代格式是收敛的. 除此之外，还精确地给出了迭代格式出现的两个参数和迭代矩阵谱半径的最小上界的计算方法. 对于复对称线性代数方程组，为了提高其求解效率，基于 NSS 超松弛加速迭代格式，提出一类求解复线性代数方程组的超松弛迭代 MHSS 加速迭代格式，然后推导了该加速迭代方法的收敛条件以及加速迭代格式中参数 ω 的选取办法，最后用数值实验证明方法的正确性和有效性. 对于大型稀疏非线性代数方程组，提出求解非线性代数方程组的 Newton-LHSS 方法、Picard-AHSS 方法、Picard-MHSS 方法和非线性 AHSS-like 方法，并给出了 4 种方法的收敛性定理，数值实验证明了理论的正确性和方法的有效性.

第 2 章 基于增量未知元方法的非线性特征值问题的研究

2.1 非线性特征值问题简介

非线性特征值问题在科学计算的很多领域中都有广泛的应用，如流固耦合振动数值模拟问题，加速器设计中的电磁场数值模拟等. 很多学者对非线性特征值问题进行了广泛而深入的研究，并且取得了丰富的成果. 目前，求解非线性特征值的方法有自适应多尺度方法，多重网格算法迭代投影法等.

本章主要考虑如下形式的非线性特征值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = \gamma F(u), \quad \Omega \in (0,1)^n, n = 1,2 \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\gamma>0$，F：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 C^2 映射，满足下列条件：

$$① \ F(0) = 0 \qquad ② \ F'(0) = 1 \qquad ③ \ \lim_{\|u\|\to 0} \frac{(F(u),u)}{\|u\|} = -\infty$$

Picard 迭代方法是求解不动点方程的有效方法之一. 对于方程(2.1)，虽然单纯利用 Picard 方法并不能正确得到其解，但若在连续两次进行 Picard 迭代后，引入松弛因子 α，通过适当选取 α 的值，便可以计算出方程(2.1)的解，这就是所谓的 Marder-Weitzner 方法. 众所周知，IU 方法是进行有限差分时逼近惯性流形的一种近似方法，当对求解区域进行多水平离散时，用粗网格点的增量代替相应细网格点的未知函数的值，从而，增量未知元函数在不同类型的点产生不同的矩阵结构。这种特殊的矩阵结构对原代数系统起到了预处理作用，从而缩短了计算时间. 我们的目标是利用增量未知元的多尺度性质，对 Marder-Weitzner 方法进行修正.

本章在已有成果的基础上，对非线性特征值问题进行研究. 首先回顾了与本章相关的线性 Richardson 方法和 Marder-Weitzner 方法，然后通过引入一种新的$\boldsymbol{\Lambda}$ 范数，给出松弛因子 α 的 4 种计算方法，称为修正的 Marder-Weitzner 方法，并给出收敛性定理. 最后在数值算例中，利用增量未知元方法，对网格进行多水平离散，数值结果证明了新方法的正确性和有效性.

2.2 线性 Richardson 方法和 Marder-Weitzner 方法

利用有限差分方法将方程(2.1)进行离散，得到下列非线性代数方程组：

$$\boldsymbol{AU} = \gamma \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) \tag{2.2}$$

这里，$\boldsymbol{A}$ 为 $-\Delta$ 算子离散后得到的矩阵，$\boldsymbol{F}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是 C^2 映射，$\gamma > 0$. 除此之外，为了计算方便，固定参数 γ，则可以得到与方程组(2.2)等价的不动点方程：

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}) \tag{2.3}$$

式(2.3)中，$\boldsymbol{T} = \gamma \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{F}(\cdot)$.

2.2.1 线性 Richardson 方法

考虑下列线性方程组

$$\boldsymbol{Mx} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{2.4}$$

其中 $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵.

线性 Richardson 方法：给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛，计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Mx}^{(k)})$，其中非零实参数 α 称为迭代参数.

Richardson 迭代格式收敛的充分条件是

$$0 < \alpha < \frac{2}{\rho(\boldsymbol{M})}$$

其中，$\rho(\boldsymbol{M})$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的谱半径.

2.2.2 Marder-Weitzner 方法

考虑非线性特征值问题方程组(2.2)，我们知道，仅仅利用 Picard 迭代

$$\boldsymbol{U}^{(k+1)} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}^{(k)})$$

不能得到方程组(2.2)的不稳定解. 事实上，若设 $\boldsymbol{U}^*$ 为方程组(2.2)的精确解，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} = \boldsymbol{U}^{(m)} - \boldsymbol{U}^*$ 为第 m 次 Picard 迭代的误差，则利用 Taylor 公式，可以得出

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + o(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)})$$

其中，$\boldsymbol{\Psi}$ 为算子 $\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{U}^*$ 处的 Jacobi 矩阵. 为了保证 Picard 迭代方法收敛，应有 $\rho(\boldsymbol{\Psi}) < 1$. 但在实际问题中，当 $\boldsymbol{U}^*$ 为不稳定解时，这个条件很难满足. 因此，Marder 和 Weitzner 提出了下面的三步迭代格式.

Marder-Weitzner 方法：给定一个初值 $\boldsymbol{U}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{\boldsymbol{U}^{(k)}\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{\left(k+\frac{1}{3}\right)} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}^{(k)}) \\ \boldsymbol{U}^{\left(k+\frac{2}{3}\right)} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{\left(k+\frac{1}{3}\right)}\right) \\ \boldsymbol{U}^{(k+1)} = \boldsymbol{U}^{(k)} + \alpha\left(2\boldsymbol{U}^{\left(k+\frac{1}{3}\right)} - \boldsymbol{U}^{(k)} - \boldsymbol{U}^{\left(k+\frac{2}{3}\right)}\right) \end{cases} \tag{2.5}$$

此时，可算出 Marder-Weitzner 方法的误差方程

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = (\boldsymbol{I} - \alpha(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi})^2)\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + o(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)})$$

为了保证 Marder-Weitzner 方法收敛，应有

$$\rho(\boldsymbol{I}-\alpha(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Psi})^2)<1 \tag{2.6}$$

因此，只要参数 α 足够小，$\rho(\boldsymbol{\Psi})$ 可以大于 1.

对于上述 Marder-Weitzner 方法，有下面的收敛性定理.

定理 2.1　假设算子 $\boldsymbol{T}$ 在解 $\boldsymbol{U}^*$ 处 F 可导. 记 $\boldsymbol{\Psi}$ 为 $\boldsymbol{T}$ 在 $\boldsymbol{U}^*$ 处的 Jacobi 矩阵，并假设 $\boldsymbol{\Psi}$ 的特征值为不等于 1 的实数. 那么，当 $0<\alpha<\alpha_c$ 时，存在 $\boldsymbol{U}^*$ 的某个邻域 V_α，当 $\boldsymbol{U}^{(0)}\in V_\alpha$ 时，由式(2.5)定义的序列 $\{\boldsymbol{U}^{(k)}\}$ 收敛到 $\boldsymbol{U}^*$，即

$$\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{U}^{\left(k+\frac{i}{3}\right)}=\boldsymbol{U}^*,\quad i=0,1,2$$

除此之外，如果记：

$$a=\sup_{y\in sp(\boldsymbol{\Psi})}|1-y|,\quad b=\inf_{y\in sp(\boldsymbol{\Psi})}|1-y|$$

则有

$$\alpha_c=\frac{2}{a^2},\quad \alpha_{\text{opt}}=\frac{2}{a^2+b^2}$$

这里，α_{opt} 代表参数 α 的最优选取.

2.3　Marder-Weitzner 方法的改进

令 $\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 关于 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的向量积定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{\Lambda}}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{b},\quad \forall\,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$$

相应地，$\|\cdot\|_{\boldsymbol{\Lambda}}$ 为 $\boldsymbol{\Lambda}$ 内积的从属范数.

2.3.1　修正的 Richardson 方法

修正的 Richardson 方法：给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{x}^{(k)}+\alpha_k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(k)})\\ \alpha_k=\dfrac{(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}^{(k)},\boldsymbol{r}^{(k)})_{\boldsymbol{\Lambda}}}{(\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}^{(k)},\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}^{(k)})_{\boldsymbol{\Lambda}}}\end{cases}$$

这里，选取松弛因子 α_k 使得第 k 次迭代的残量函数 $g(\alpha)\overset{\text{def}}{=}\|\boldsymbol{r}^{(k)}-\alpha_k\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}^{(k)}\|_{\boldsymbol{\Lambda}}^2$ 取最小，α_k 的值随着迭代步数 k 的不同而不同.

2.3.2　修正的 Marder-Weitzner 方法

类似地，在 Marder-Weitzner 方法中，用 α_k 代替 α，我们提出修正的 Marder-Weitzner 方法.

修正的 Marder-Weitzner 方法：给定一个初值 $\boldsymbol{U}^{(0)}\in\mathbf{R}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{\boldsymbol{U}^{(k)}\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{(k+\frac{1}{5})} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}^{(k)}) \\ \boldsymbol{U}^{(k+\frac{2}{5})} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{(k+\frac{1}{5})}\right) \\ \boldsymbol{U}^{(k+1)} = \boldsymbol{U}^{(k)} + \alpha_k\left(2\boldsymbol{U}^{(k+\frac{1}{5})} - \boldsymbol{U}^{(k)} - \boldsymbol{U}^{(k+\frac{2}{5})}\right) \end{cases} \tag{2.7}$$

下面,给出 α_k 的计算方法.

记第 k 步迭代残量为 $\boldsymbol{r}^{(k)} = \boldsymbol{U}^{(k)} - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}^{(k)})$,利用式(2.7),可以得到 $\boldsymbol{r}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{r}^{(k+1)}$ 的递推关系:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}^{(k+1)} &= (\boldsymbol{I} - \alpha_k(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi})^2)\boldsymbol{r}^{(k)} + o(\boldsymbol{r}^{(k)}) \\ &= (\boldsymbol{I} - \alpha_k\boldsymbol{N})\boldsymbol{r}^{(k)} + o(\boldsymbol{r}^{(k)}) \\ &\approx (\boldsymbol{I} - \alpha_k\boldsymbol{N})\boldsymbol{r}^{(k)} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{N} \overset{\text{def}}{=\!=} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Psi})^2$. 根据 $\|(\boldsymbol{I} - \alpha_k\boldsymbol{N})\boldsymbol{r}^{(k)}\|_{\boldsymbol{\Lambda}}$ 取得最小,可得出 α_k 的 4 种计算方法.

① 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{N}$ 时,有

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{N}^2\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})}{(\boldsymbol{N}^2\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)})} \tag{2.8}$$

② 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{N}^{-1}$ 时,有

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})_{\boldsymbol{N}^{-1}}}{(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)})_{\boldsymbol{N}^{-1}}} = \frac{(\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})}{(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})} \tag{2.9}$$

③ 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{I}$ 时,有

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})}{(\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)})} \tag{2.10}$$

④ 当 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^{-1}$ 时,有

$$\alpha_k = \frac{(\boldsymbol{N}^2\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)}) + (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})}{(\boldsymbol{N}^2\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}) + (\boldsymbol{N}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)})} \tag{2.11}$$

这里,$(\cdot,\cdot)$ 表示 Euclid 范数,也就是 $\boldsymbol{\Lambda}$ 范数中 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{I}$(单位矩阵)的情形.

为了计算 α_k 的值,需要计算 $\boldsymbol{\Psi}^i\boldsymbol{r}^{(k)}, i=1,2,3,4$ 的值. 事实上,补充两步 Picard 迭代

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{(k+\frac{3}{5})} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{(k+\frac{2}{5})}\right) \\ \boldsymbol{U}^{(k+\frac{4}{5})} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{(k+\frac{3}{5})}\right) \end{cases}$$

可以得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^{(k+\frac{3}{5})} = \boldsymbol{U}^* + \boldsymbol{\Psi}^3\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + o(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}) \\ \boldsymbol{U}^{(k+\frac{4}{5})} = \boldsymbol{U}^* + \boldsymbol{\Psi}^4\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + o(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}) \\ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{U}^{(k+\frac{4}{5})}\right) = \boldsymbol{U}^* + \boldsymbol{\Psi}^5\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} + o\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right) \end{cases}$$

由上式可以得到 $\boldsymbol{\Psi}^i\boldsymbol{r}^{(k)}, i=1,2,3,4$ 的近似计算方法,也就是

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}^i\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{U}^{k+\frac{i}{5}} - \boldsymbol{U}^{k+\frac{i+1}{5}} + o(\boldsymbol{r}^k), \quad i = 1,2,3 \\ \boldsymbol{\Psi}^4\boldsymbol{r}^k = \boldsymbol{U}^{k+\frac{i}{5}} - \boldsymbol{J} + o(\boldsymbol{r}^k) \end{cases}$$

利用上述结果可以得到 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}^{(k)}$ 和 $\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{r}^{(k)}$ 的近似计算方法. 令 $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{r}^{(k)}$,则有

$$\begin{aligned}W_1 &= (I - 2\Psi + \Psi^2) r^{(k)} \\ &= r^{(k)} - 2\Psi r^{(k)} + \Psi^2 r^{(k)} \\ &= U^{(k)} - U^{(k+\frac{1}{5})} - 2\left(U^{(k+\frac{1}{5})} - U^{(k+\frac{2}{5})}\right) + U^{(k+\frac{2}{5})} - U^{(k+\frac{3}{5})} + o\left(r^{(k)}\right) \\ &\approx U^k + 3\left(U^{k+\frac{2}{5}} - U^{k+\frac{3}{5}}\right) - U^{k+\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2 &= r^{(k)} - 4\Psi r^{(k)} + 6\Psi^2 r^{(k)} - 4\Psi^3 r^{(k)} + \Psi^4 r^{(k)} \\ &= U^{(k)} - U^{(k+\frac{1}{5})} - 4\left(U^{(k+\frac{1}{5})} - U^{(k+\frac{2}{5})}\right) + 6\left(U^{(k+\frac{2}{5})} - U^{(k+\frac{3}{5})}\right) - \\ &\quad 4\left(U^{(k+\frac{3}{5})} - U^{(k+\frac{4}{5})}\right) + U^{(k+\frac{4}{5})} - J + o(r^k) \\ &\approx U^{(k)} + 5\left(2U^{(k+\frac{2}{5})} - U^{(k+\frac{1}{5})}\right) - 5\left(2U^{(k+\frac{3}{5})} - U^{(k+\frac{4}{5})}\right) - J\end{aligned}$$

2.3.3　A1 方法

下面,我们给出 4 个修正的 Marder-Weitzner 方法,统称为 A1 方法.

假设 U^* 是方程(2.1)的离散形式 $AU=F(U)$ 或者 $U=T(U)$ 的解,初值 $U^{(0)}\in \mathbf{R}^n$ 是解 U^* 的一个近似值,对于 $k=0,1,2,\cdots$

步骤 1:$U^{(k+\frac{i}{5})} = T\left(U^{(k+\frac{i-1}{5})}\right)$,$i=1,2,3,4$ 并且 $J=T\left(U^{(k+\frac{4}{5})}\right)$

步骤 2:$r^{(k)} = U^{(k)} - U^{(k+\frac{1}{5})}$

$$W_1 = U^{(k)} + 3\left(U^{(k+\frac{2}{5})} - U^{(k+\frac{3}{5})}\right) - U^{(k+\frac{3}{5})}$$

$$W_2 = U^{(k)} + 5\left(2U^{(k+\frac{2}{5})} - U^{(k+\frac{1}{5})}\right) - 5\left(2U^{(k+\frac{3}{5})} - U^{(k+\frac{4}{5})}\right) - J$$

步骤 3:计算松弛参数 $\alpha_k^{(i)}$,$i=1,2,3,4$,

$$\begin{cases}\alpha_k^{(1)} = \dfrac{(W_2, r^{(k)})}{(W_2, W_1)} \\ \alpha_k^{(2)} = \dfrac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(W_1, r^{(k)})} \\ \alpha_k^{(3)} = \dfrac{(W_1, r^{(k)})}{(W_1, W_1)} \\ \alpha_k^{(4)} = \dfrac{(W_2, r^{(k)}) + (r^{(k)}, r^{(k)})}{(W_2, W_1) + (W_1, r^{(k)})}\end{cases} \tag{2.12}$$

步骤 4:$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \alpha_k^{(i)}\left(2U^{(k+\frac{1}{5})} - U^{(k)} - U^{(k+\frac{2}{5})}\right)$,$i=1,2,3,4$,

$k=k+1$ 转向步骤 1.

下面给出方法的收敛性定理.

定理 2.2　假设算子 T 在解 U^* 处 F 可导. 记 Ψ 为 T 在 U^* 处的 Jacobi 矩阵,并假设 Ψ 的特征值为不等于 1 的实数. 那么,当 $0<\alpha<\alpha_c$ 时,存在 U^* 的某个邻域 V_α,当 $U^{(0)}\in V_\alpha$ 时,4 种修正方法产生的序列$\{U^{(k)}\}$收敛到 U^*,即

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{U}^{(k+\frac{i}{5})} = \boldsymbol{U}^*, \quad i = 0,1,2$$

除此之外，如果记

$$a = \sup_{y\in sp(\boldsymbol{\Psi})} |1-y|, \quad b = \inf_{y\in sp(\boldsymbol{\Psi})} |1-y|$$

则有

$$\alpha_c = \frac{2}{a^2}, \quad \alpha_{opt} = \frac{2}{a^2+b^2}$$

这里，α_{opt}代表参数 α 的最优选取.

2.4 数值实验

本节结合修正的 Marder-Weitzner 方法，分别利用 CSIU(六阶紧格式增量未知元)、LRA、MLR、MW、A1IU 和 MWIUa 等算法计算非线性特征值问题.

2.4.1 Dirichlet 问题

考虑下面经典的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega = [0,1]^2 \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

为了方便，令 $h_x = h_y = h$，将方程(2.13)离散，得到

$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{ij} \tag{2.14}$$

令初值 $\hat{U}^0 = \sin(16xy(1-x)(1-y))$，利用自适应 Richardson 方法计算. 表 2.1 给出了式(2.14)系数矩阵最大特征值和最小特征值的比值，而当我们用 IUS 方法的时候，矩阵条件数明显降低.

表 2.1 系数矩阵条件数的比较

Initial grids	Without CSIU	With CSIU	Initial grids	Without CSIU	With CSIU
$N=7$	9.4835	2.9951	$N=25$	35.8304	2.3188
$N=17$	24.5760	2.3810	$N=30$	42.0890	2.2811

2.4.2 非线性特征值问题

考虑下列问题，找到 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足下列边界值问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = \gamma u - \upsilon |u|^{\varepsilon} u, & \Omega = [0,1]^2 \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.15}$$

其中 $\gamma, \upsilon > 0$，$0 < \varepsilon \leqslant 2$. 我们的目的是计算方程(2.15)的不稳定解.

当参数 γ 穿越 $-\Delta$ 的特征值时，方程的解会产生分歧，给求解带来困难. 下面列出一些解的相关性质.

令 $\Lambda_{p,q} = \pi^2(p^2+q^2)$，$pq \neq 0$ 是 $-\Delta$ 的一个特征值，$\Phi_{p,q} = \sin(p\pi x)\sin(q\pi x)$ 是相应的特征函数.

- 当 $\gamma<\Lambda_{1,1}$时，方程(2.15)只有一个稳定的平凡解 $u=0$.
- 当 $\Lambda_{1,1}<\gamma<\Lambda_{1,2}$，平凡解 $u=0$ 变得不稳定，方程(2.15)存在两个稳定解，记为 $K(1,1)$，它们是特征函数 $\phi_{1,1}$ 的变形.
- 当 $\Lambda_{p,q}<\gamma,p^2+q^2>2$，除了 $K(1,1)$ 型解，所有解(包括平凡解)都是不稳定的. 令 a 和 b 满足 $a^2+b^2\leqslant p^2+q^2$，这些不稳定解是下列两类函数的变形.

(1) $-\Delta$ 算子的特征值函数 $\Phi_{a,b}$，相应的不稳定解是 $K(a,b)$型的. 为了计算它们，取 $U_0=k\Phi_{a,b}$作为初值.

(2) $\Delta_{a,b}$型解. 为了计算这种类型的解，取初值

$$U_0=\Theta_{a,b},\quad \Theta_{a,b}=\sin(a\pi x)\sin(b\pi y)Z(x,y)$$

其中 $Z(x,y)$在两条平行线 $y=x$ 和 $y=-x$ 上值为零.

在 $C_{5,1}$网格①上给出数值结果，令参数 $\gamma=120,\upsilon=120,\varepsilon=1$. 取初始值 $\hat{U}^0=\sin(\pi x)\sin(\pi|x-y|)$，取 200 次迭代. 图 2.1 和图 2.2 给出 200 次迭代的数值结果，图 2.3 和图 2.4 给出 50 次迭代的数值结果.

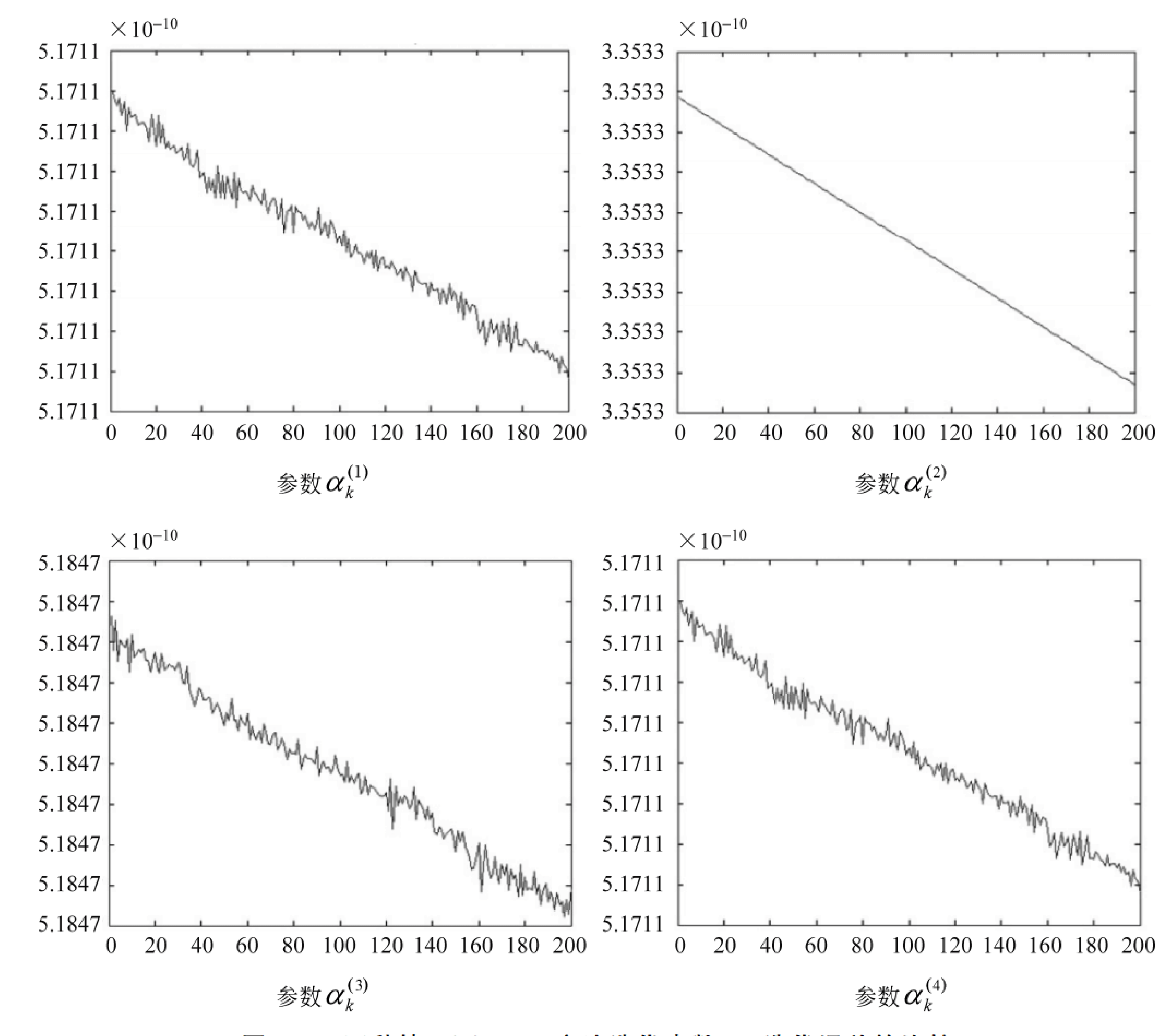


图 2.1　四种情况下 A1IU 方法迭代步数 VS 迭代误差的比较

① 所谓 $C_{5,1}$网格，指的是区域的每个方向上初始粗网格点数为 1，加细 5 次，最后，每个方向细网格点数为 $2^5\times(1+1)-1$ 个，即网格点数为 61.

在数值计算的过程中,对网格进行两层剖分. 数值结果见表 2.2～表 2.17. 这里注意,表 2.9 中数值残量由单次迭代获得. 注意到 4 种情况(case1,case2,case3,case4)相应于 $A1$ 方法中 4 种松弛参数 $\alpha_k^{(i)}$ ($i=1,2,3,4$)的选择. 这里,N 表示初始网格点,T 代表 CPU 时间,单位是秒.

表 2.2　LRA 方法的迭代残量

N	T	Res	N	T	Res
7	0.0000	0.5220	8	0.0000	0.4462
9	0.000 00	0.4615	10	0.0000	0.4311
11	0.0000	0.3842	12	0.0000	0.3746
13	0.0000	0.3575	14	0.0000	0.3556
15	0.0000	0.3378	16	0.0160	0.3180
17	0.0150	0.3208	18	0.0000	0.3177
19	0.0160	0.3222	20	0.0160	0.3016
21	0.0150	0.2919	22	0.0150	0.2840
23	0.0160	0.2870	24	0.0310	0.2820
25	0.0320	0.2677	26	0.0470	0.2675
27	0.0780	0.2532	28	0.0470	0.2530
29	0.0780	0.2479	30	0.0940	0.2498
31	0.2030	0.2430			

表 2.3　MLR 方法的迭代残量

N	T	Res	N	T	Res
7	0.0000	0.2350	8	0.0160	0.2057
9	0.0320	0.1900	10	0.0160	0.1811
11	0.0000	0.1740	12	0.0150	0.1690
13	0.001 50	0.1655	14	0.0160	0.1690
15	0.0310	0.1604	16	0.0310	0.1604
17	0.0310	0.1614	18	0.0470	0.1667
19	0.0630	0.1631	20	0.0780	0.1694
21	0.0940	0.1662	22	0.1090	0.1724
23	0.1720	0.1702	24	0.5620	0.1764
25	0.7650	0.1764	26	0.7500	0.1807
27	0.9540	0.1793	28	0.9690	0.1854
29	1.8900	0.1841	30	0.9530	0.1902

表 2.4　MW 方法的迭代残量

N	T	Res	N	T	Res
7	0.0000	0.1157	8	0.0160	1.1129
9	0.000 00	1.1111	10	0.0160	1.1097
11	0.0160	0.1090	12	0.0160	1.1083
13	0.0150	1.1078	14	0.0150	1.1074
15	0.0160	1.1071	16	0.0150	1.1069
17	0.0310	1.1067	18	0.0160	1.1066
19	0.0160	1.1064	20	0.0470	1.1063
21	0.0460	1.1062	22	0.0470	1.1061
23	0.0780	1.1061	24	0.0780	1.1060
25	0.1100	1.1060	26	0.0930	1.1059
27	0.3910	1.1059	28	0.2500	1.1059
29	0.4060	1.1058	30	0.4530	1.1058
31	0.4220	1.1058			

表 2.5　参数取$\alpha_k^{(1)}$时 A1 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.3120	1.1475×10^{11}	7	0.0780	3.3499×10^{15}
9	0.3750	1.1056×10^{12}	9	0.3280	1.2464×10^{16}
17	14.7500	2.9365×10^{15}	17	14.7340	9.9326×10^{21}
25	151.8120	9.5161×10^{17}	25	151.8750	6.8619×10^{23}

表 2.6　参数取$\alpha_k^{(2)}$时 A1 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.0940	1.1627×10^{11}	7	0.0930	303880×10^{15}
9	0.3120	1.1199×10^{12}	9	0.3120	1.6105×10^{16}
17	14.7340	3.2768×10^{15}	17	14.6720	1.0057×10^{20}
25	151.7660	7.6001×10^{17}	25	151.2810	6.9470×10^{23}

表 2.7　参数取$\alpha_k^{(3)}$时 A1 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.0780	1.1483×10^{11}	7	0.0780	3.3513×10^{15}
9	0.3130	1.1064×10^{12}	9	0.3280	1.6093×10^{16}
17	14.6720	3.2455×10^{15}	17	14.6880	9.9388×10^{21}
25	151.3280	9.5163×10^{17}	25	152.1410	6.8661×10^{23}

表 2.8 参数取$\alpha_k^{(4)}$时 A1 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.0940	1.1475×10^{11}	7	0.0780	3.3499×10^{15}
9	0.3120	1.1056×10^{12}	9	0.3130	1.6092×10^{16}
17	14.6560	3.2437×10^{15}	17	14.6870	9.9326×10^{21}
25	151.2500	9.5161×10^{17}	25	151.9530	6.8619×10^{23}

表 2.9 在 $N=7$ 时 MWIU 方法的迭代残量(1—3 步迭代)

Scheme MWIU	1iteration	2iterations	3iterations
$\varepsilon=1$	0.9734	5.3498×10^{12}	2.5112×10^{17}
$\varepsilon=2$	0.9722	4.5519×10^{12}	4.8392×10^{20}

表 2.10 参数取$\alpha_k^{(1)}$时 A1IU 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.1090	1.1086×10^{11}	7	0.1090	1.6571×10^{13}
17	15.3120	3.6844×10^{13}	17	15.2650	4.7046×10^{17}
25	100.1400	1.2251×10^{16}	25	157.4220	3.0070×10^{20}

表 2.11 参数取$\alpha_k^{(2)}$时 A1IU 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.0940	2.0743×10^{13}	7	0.0940	1.1233×10^{11}
17	14.9380	3.8167×10^{13}	17	14.9530	4.99216×10^{17}
25	89.7350	1.2356×10^{16}	25	156.4060	3.0685×10^{20}

表 2.12 参数取$\alpha_k^{(3)}$时 A1IU 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.0460	1.7321×10^{13}	7	0.0940	1.1094×10^{11}
17	10.0470	3.2437×10^{15}	17	11.5000	4.7699×10^{17}
25	91.1870	1.3451×10^{14}	25	84.7810	3.0117×10^{20}

表 2.13 参数取$\alpha_k^{(4)}$时 A1IU 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.0470	1.1086×10^{11}	7	0.1250	1.6571×10^{13}
17	15.0930	3.6844×10^{13}	17	14.9220	4.7046×10^{17}
25	159.0160	1.2251×10^{16}	25	166.1410	3.0070×10^{20}

表 2.14　参数取$\alpha_k^{(1)}$时 MWIUa 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.1410	3.6548×10^{12}	7	0.0940	6.0978×10^{16}
17	16.6720	1.2513×10^{15}	17	15.7190	1.5269×10^{21}
25	178.7810	7.2213×10^{17}	25	177.4380	1.1438×10^{23}

表 2.15　参数取$\alpha_k^{(2)}$时 MWIUa 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.1560	3.7204×10^{12}	7	0.1100	6.2541×10^{16}
17	15.7030	1.2715×10^{15}	17	15.7030	1.5482×10^{21}
25	197.0470	7.2258×10^{17}	25	195.8280	1.1587×10^{23}

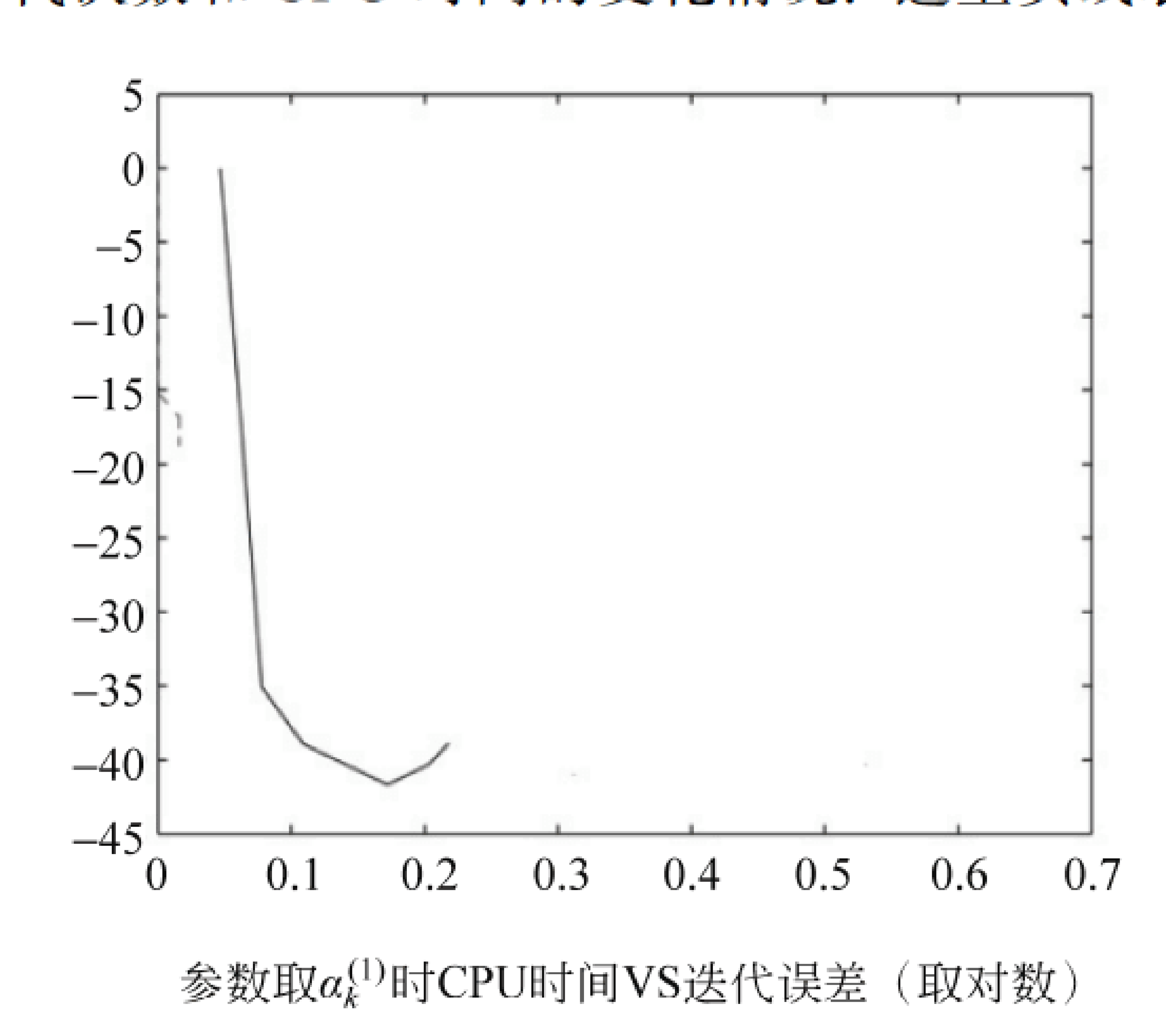
表 2.16　参数取$\alpha_k^{(3)}$时 MWIUa 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.1090	3.6548×10^{12}	7	0.0780	6.0978×10^{16}
17	15.6090	1.2539×10^{15}	17	15.7340	1.5282×10^{21}
25	188.5940	7.2213×10^{17}	25	186.9840	1.1448×10^{23}

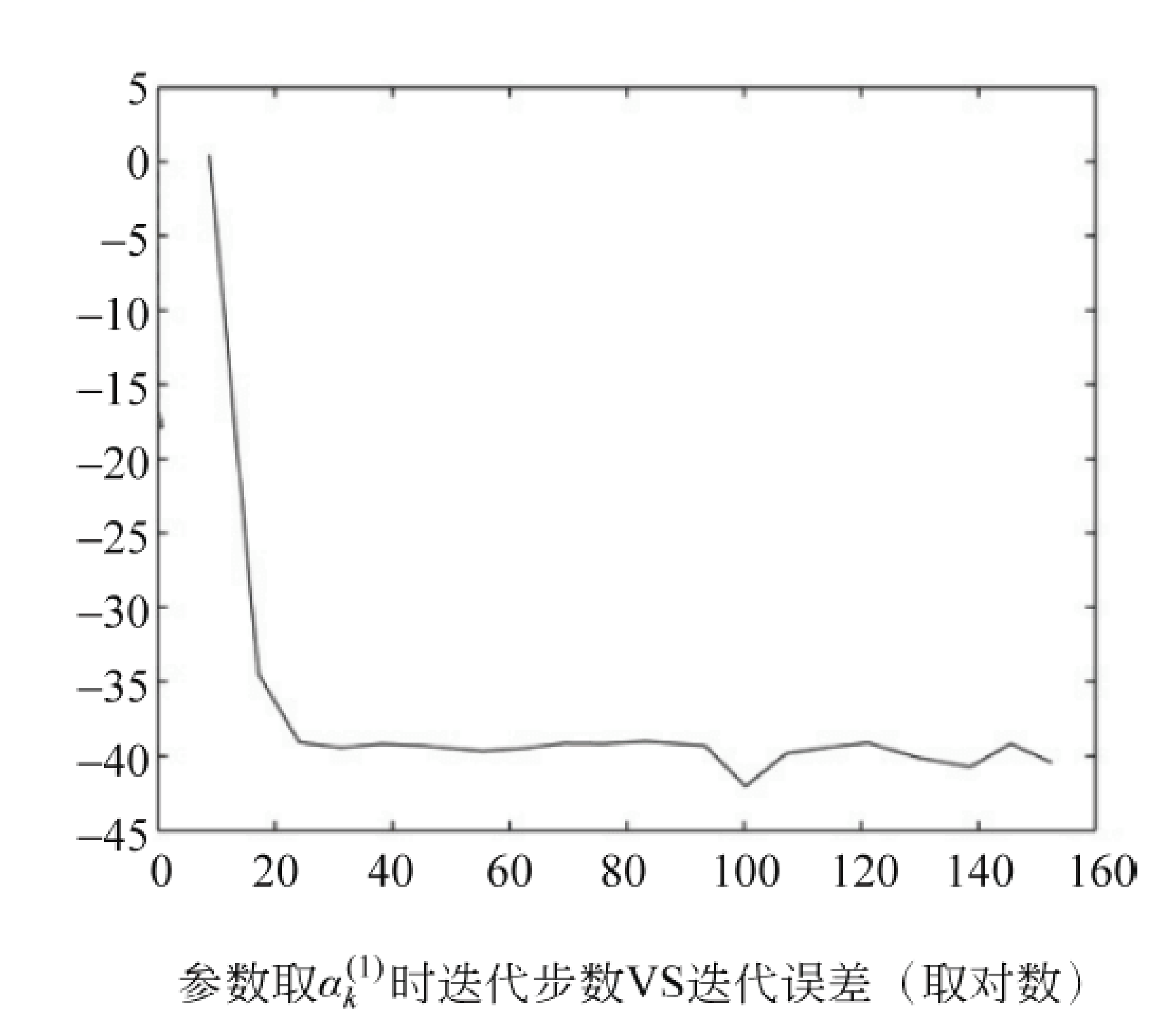
表 2.17　参数取$\alpha_k^{(4)}$时 MWIUa 方法的迭代残量

$N(\varepsilon=1)$	T	Res	$N(\varepsilon=1.2)$	T	Res
7	0.1090	3.6548×10^{12}	7	0.0780	6.0981×10^{16}
17	15.2190	1.2513×10^{15}	17	15.1870	1.5269×10^{21}
25	186.1880	7.2213×10^{17}	25	189.3750	1.1438×10^{23}

由数值结果可以看出，在这里，A1IU 和 MWIUa 方法比其他方法更有效．在相同的计算条件下，我们进一步比较了这两种方法，见图 2.2．这几幅图给出了数值残量随着迭代次数和 CPU 时间的变化情况．这里实线表示 MWIUa，虚线表示 A1IU 方法．



参数取$\alpha_k^{(1)}$时CPU时间VS迭代误差（取对数）



参数取$\alpha_k^{(1)}$时迭代步数VS迭代误差（取对数）

图 2.2　四种情况下 A1IU 和 MWIUa 方法的比较

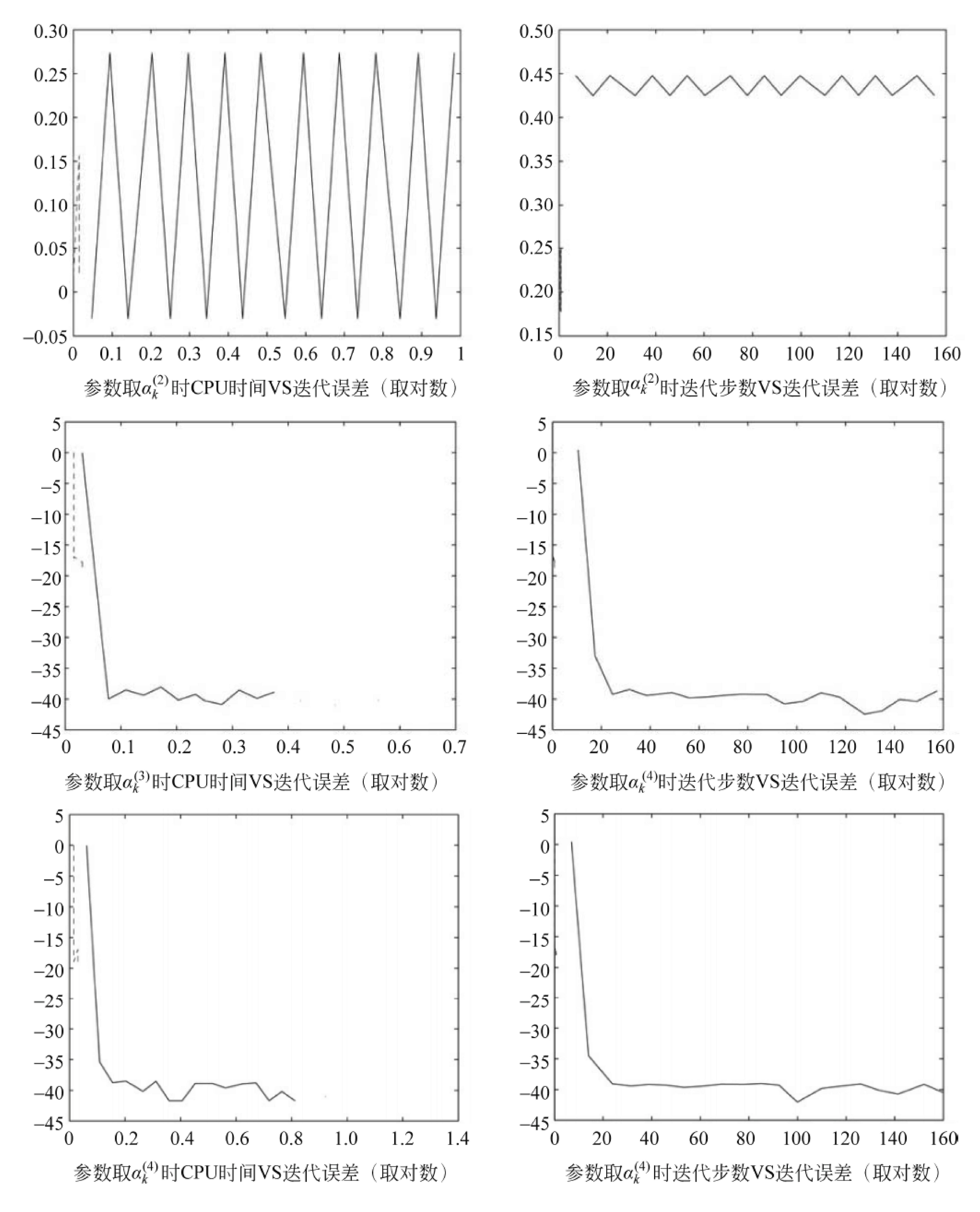


图 2.2 （续）

2.4.3 结论

由经典 Richardson 方法和 Marder-Weitzner 方法，建立了 4 种有效的修正 Marder-Weitzner 方法，应用六阶紧格式增量未知元更加有效.

根据数值结果，MWIUa、A1IU 和 A1 方法比其他的修正的 Marder-Weitzner 方法有效. 如果迭代之前给出松弛参数的值，每种迭代方法的 CPU 时间与计算机计算能力有很大关系. 当松弛参数随着每次迭代自动计算，收敛速度加快，CPU 时间降低.

第 3 章

一类反应扩散方程的多层分块类小波增量未知元

3.1 多层分块类小波增量未知元

考虑下面的反应扩散方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\left(\varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g(u) = 0, & (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T] \\ u(x,y,0) = u_0, & (x,y) \in \Omega, \quad t = 0 \\ u(x,y,t) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega, \quad t \in (0,T] \end{cases} \tag{3.1}$$

其中，$\nu>0$，$0<\varepsilon\ll 1$，Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集，并且边界足够光滑，

$$g(s) = \sum_{j=0}^{2q-1} b_j s^j, \quad b_{2q-1} > 0 \tag{3.2}$$

求解方程(3.1)的一种方法是在一致网格上将方程离散，然后构造类小波增量未知元(WIU)型数值格式. 但是数值实验中，我们发现，使用这种方法得到的稀疏矩阵在 ε 取值很小的情况下，条件数增长很快，因此，使用 WIU 方法求解上述方程很浪费时间.

为了更加有效地求解方程(3.1)，我们提出了一种基于矩阵分块的新的增量未知元：分块类小波增量未知元(WBIU). 在引入新的向量范数后，我们建立了新的范数估计和两种 WBIU 型数值格式：显格式和隐格式，并证明了在新的范数估计下，格式是稳定的. 最后，数值实验证明了 WBIU 的有效性.

下面，就来仔细地分析研究这类反应扩散方程的多层分块类小波增量未知元.

为了简单，令 $\Omega=[0,1]^2$. 现在，考虑方程(3.1) 的有限差分离散，选取步长 $h_d=1/(2^d N+1)$，$N\in\mathbf{N}$. 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_{h_d}}{\partial t} + \nu \boldsymbol{A}_{h_d}\boldsymbol{U}_{h_d} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}_{h_d}) = \boldsymbol{0} \tag{3.3}$$

其中 $\boldsymbol{U}_{h_d}\in\mathbf{R}^{(2^d N)^2}$ 是 u 在节点处的近似值组成的向量. $\boldsymbol{A}_{h_d}$ 是阶数为 $(2^d N)^2$ 的矩阵，下面记：$\boldsymbol{A}_d=\boldsymbol{A}_{h_d}$，$\boldsymbol{U}_d=\boldsymbol{U}_{h_d}$

$$\boldsymbol{A}_d = \frac{1}{h_d^2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_d & -\boldsymbol{I} & & \\ -\boldsymbol{I} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\boldsymbol{I} \\ & & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_d = \begin{pmatrix} 2+2\varepsilon & -\varepsilon & & \\ -\varepsilon & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\varepsilon \\ & & -\varepsilon & 2+2\varepsilon \end{pmatrix}$$

沿 x 方向将未知元排序，

$$\boldsymbol{U}_d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^d \\ \boldsymbol{u}_2^d \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{2^d N}^d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_\beta^d = (\boldsymbol{u}_{1\beta}^d, \boldsymbol{u}_{2\beta}^d, \cdots, \boldsymbol{u}_{2^d N}^d)^{\mathrm{T}}$$

根据矩阵分块，可将式(3.3)重新写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_\beta^d}{\partial t} + \nu(-\boldsymbol{u}_{\beta-1}^d + \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{u}_\beta^d - \boldsymbol{u}_{\beta+1}^d) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_\beta^d) = \boldsymbol{0}, \quad \beta = 1, 2, \cdots, 2^d N \tag{3.4}$$

对于 $j=1,2,\cdots,2^{d-1}N$，定义分块类小波增量未知元(WBIU)为

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_{2j}^d = (\boldsymbol{u}_{2j-1}^d + \boldsymbol{u}_{2j}^d)/2 \\ \boldsymbol{z}_{2j}^d = (\boldsymbol{u}_{2j-1}^d - \boldsymbol{u}_{2j}^d)/2 \end{cases} \tag{3.5}$$

反过来，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{2j}^d = \boldsymbol{y}_{2j}^d - \boldsymbol{z}_{2j-1}^d \\ \boldsymbol{u}_{2j-1}^d = \boldsymbol{y}_{2j}^d + \boldsymbol{z}_{2j-1}^d \end{cases} \tag{3.6}$$

引入下面记号：

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{\mathrm{even}}^d \\ \boldsymbol{U}_{\mathrm{odd}}^d \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{even}}^d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2^d \\ \boldsymbol{u}_4^d \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{2^d N}^d \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{U}_{\mathrm{odd}}^d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^d \\ \boldsymbol{u}_3^d \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{2^d N-1}^d \end{pmatrix}$$

和

$$\bar{\boldsymbol{U}}_d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}^d \\ \boldsymbol{Z}^d \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{Y}^d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_2^d \\ \boldsymbol{y}_4^d \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{2^d N}^d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Z}^d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1^d \\ \boldsymbol{z}_3^d \\ \vdots \\ \boldsymbol{z}_{2^d N-1}^d \end{pmatrix}$$

容易看出

$$\boldsymbol{U}_d = \boldsymbol{P}_d \widetilde{\boldsymbol{U}}_d, \quad \widetilde{\boldsymbol{U}}_d = \boldsymbol{S}_d \bar{\boldsymbol{U}}_d$$

这里，$\boldsymbol{P}_d$ 是阶数为 $(2^d N)^2$ 的排序矩阵，有下列形式：

$$\boldsymbol{P}_d = (\boldsymbol{E}_d \quad \boldsymbol{V}_d) \otimes \boldsymbol{I}_d$$

$\boldsymbol{E}_d$ 和 $\boldsymbol{V}_d$ 都是阶数为 $2^d N \times 2^{d-1} N$ 的矩阵

$$
\boldsymbol{E}_d=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}_d=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{S}_d$是阶数为 $(2^dN)^2$ 的转换矩阵，

$$
\boldsymbol{S}_d=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{d-1}&-\boldsymbol{I}_{d-1}\\\boldsymbol{I}_{d-1}&\boldsymbol{I}_{d-1}\end{pmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_d
$$

$\boldsymbol{I}_d$是 2^dN 阶的单位阵．因此我们有

$$
\boldsymbol{U}_d=\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d \tag{3.7}
$$

将上式代入方程(3.3)，并且在方程两端同乘以 $(\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d)^{\mathrm{T}}$，则成立：

$$
\frac{\partial(\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d}{\partial t}+\nu(\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d+(\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d)=\boldsymbol{0} \tag{3.8}
$$

注意到 $\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_d=\boldsymbol{I}_d\otimes\boldsymbol{I}_d$，$\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_d=2\boldsymbol{I}_d\otimes\boldsymbol{I}_d$，$\boldsymbol{P}_d$ 和 $\boldsymbol{g}$ 可交换，所以有

$$
2\frac{\partial\bar{\boldsymbol{U}}_d}{\partial t}+\nu(\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d+\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d)=\boldsymbol{0} \tag{3.9}
$$

我们得到 2 层 WBIU 型格式．

类似地，在 $\boldsymbol{Y}^d$ 上引入下一层 WBIU．令

$$
\bar{\boldsymbol{Y}}^d=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}^{d-1}\\\boldsymbol{Z}^{d-1}\end{pmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{Y}}^d=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}^{d-1}\\\boldsymbol{Z}^{d-1}\end{pmatrix}
$$

其中

$$
\boldsymbol{Y}^{d-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_4^{d-1}\\\boldsymbol{y}_8^{d-1}\\\vdots\\\boldsymbol{y}_{2^dN}^{d-1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Z}^{d-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{z}_2^{d-1}\\\boldsymbol{z}_6^{d-1}\\\vdots\\\boldsymbol{z}_{2^dN-2}^{d-1}\end{pmatrix}
$$

与方程(3.6)类似，对于 $j=1,2,\cdots,2^{d-2}N$，定义

$$
\begin{cases}\boldsymbol{y}_{4j}^d=\boldsymbol{y}_{4j}^{d-1}-\boldsymbol{z}_{4j-2}^{d-1}\\\boldsymbol{y}_{4j-2}^d=\boldsymbol{y}_{4j}^{d-1}+\boldsymbol{z}_{4j-2}^{d-1}\end{cases} \tag{3.10}
$$

因此

$$
\boldsymbol{Y}^d=\boldsymbol{P}_{d-1}\boldsymbol{S}_{d-1}\bar{\boldsymbol{Y}}^d \tag{3.11}
$$

其中 $\boldsymbol{P}_{d-1}=(\boldsymbol{E}_{d-1}\quad\boldsymbol{V}_{d-1})\otimes\boldsymbol{I}_d$ 是 $2^{2d-1}N^2$阶的排序矩阵

$$
\boldsymbol{S}_{d-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{d-2}&-\boldsymbol{I}_{d-2}\\\boldsymbol{I}_{d-2}&\boldsymbol{I}_{d-2}\end{pmatrix}\otimes\boldsymbol{I}_d
$$

这里，$\boldsymbol{P}_{d-1}$，$\boldsymbol{S}_{d-1}$分别与 $\boldsymbol{P}_d$，$\boldsymbol{S}_d$ 结构相似，但是阶数为 $(2^{d-1}N)^2$，令

$$\bar{U}_{d-1}=\begin{pmatrix}Y^{d-1}\\ Z^{d-1}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z^{d}\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{P}_{d-1}=\begin{pmatrix}P_{d-1} & 0\\ 0 & I_{d-1}\otimes I_d\end{pmatrix},\quad \widetilde{S}_{d-1}=\begin{pmatrix}S_{d-1} & 0\\ 0 & \sqrt{2}I_{d-1}\otimes I_d\end{pmatrix}$$

其中 $\widetilde{P}_{d-1}$和 $\widetilde{S}_{d-1}$是 $(2^dN)^2$阶矩阵，我们看到

$$\widetilde{P}_{d-1}\widetilde{P}_{d-1}^{\mathrm{T}}=I_d\otimes I_d,\quad \widetilde{S}_{d-1}\widetilde{S}_{d-1}^{\mathrm{T}}=2\begin{pmatrix}S_{d-1} & 0\\ 0 & \sqrt{2}I_{d-1}\otimes I_d\end{pmatrix}$$

和

$$\bar{U}_d=\widetilde{P}_{d-1}\widetilde{S}_{d-1}\bar{U}_{d-1}\tag{3.12}$$

将上式代入方程(3.9)，两端同乘以 $(\widetilde{P}_{d-1}\widetilde{S}_{d-1})^{\mathrm{T}}$，可以得到

$$2^2\frac{\partial\bar{U}_{d-1}}{\partial t}+\nu S^{\mathrm{T}}A_dS\bar{U}_{d-1}+S^{\mathrm{T}}g(S\bar{U}_{d-1})=0\tag{3.13}$$

这里，$S=P_dS_d\widetilde{P}_{d-1}\widetilde{S}_{d-1}$.

一般地，对于 $l=d-1,d-2,\cdots,1$，定义

$$\bar{Y}^{l+1}=\begin{pmatrix}Y^l\\ Z^l\end{pmatrix}\tag{3.14}$$

很明显

$$Y^{l+1}=P_lS_l\bar{Y}^{l+1}\tag{3.15}$$

这里，P_l，S_l是 $2^{d+l-1}N^2$阶矩阵，其中，

$$P_l=(E_l\quad V_l)\otimes I_d$$

$$S_l=\begin{pmatrix}I_l & -I_l\\ I_l & I_l\end{pmatrix}\otimes I_d$$

如果记 $Y^{d+1}=U_d$，$\bar{Y}^{d+1}=\bar{U}_d$，则方程(3.15)对于 $l=d$ 也成立. 令

$$\bar{U}_l=\begin{pmatrix}Y^l\\ Z^l\\ \frac{1}{\sqrt{2}}Z^{l+1}\\ \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{2}^{d-1}}Z^d\end{pmatrix},\quad \text{其中 } Y^l\in 2^{d+l-1}N^2,\ Z^l\in 2^{d+l-1}N^2$$

然后有

$$\bar{U}_{l+1}=\widetilde{P}_l\widetilde{S}_l\bar{U}_l\tag{3.16}$$

其中

$$\widetilde{P}_{l-1}=\begin{pmatrix}P_{l-1} & 0\\ 0 & I_k\otimes I_d\end{pmatrix},\quad \widetilde{S}_{l-1}=\begin{pmatrix}S_{l-1} & 0\\ 0 & \sqrt{2}I_k\otimes I_d\end{pmatrix}$$

其中 $k=(2^d-2^l)N$，因此

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_l\widetilde{\boldsymbol{P}}_l^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{I}_d & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k\otimes\boldsymbol{I}_d\end{pmatrix},\quad \widetilde{\boldsymbol{S}}_l\widetilde{\boldsymbol{S}}_l^{\mathrm{T}}=2\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{I}_d & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_k\otimes\boldsymbol{I}_d\end{pmatrix}$$

依次取 $l=d-1,\cdots,1$ 将式(3.16)连续代入(3.9)，我们得到 $d+1$ 层 WBIU

$$2^d\frac{\partial\bar{\boldsymbol{U}}_1}{\partial t}+\nu\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_1)=\boldsymbol{0}\tag{3.17}$$

这里，$\boldsymbol{S}=\widetilde{\boldsymbol{P}}_d\widetilde{\boldsymbol{S}}_d\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{P}}_1\widetilde{\boldsymbol{S}}_1$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^1\in 2^dN^2$，$\boldsymbol{Z}=\left(\boldsymbol{Z}^1,\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{Z}^2,\cdots,\frac{1}{\sqrt{2}^{d-1}}\boldsymbol{Z}^d\right)^{\mathrm{T}}$

3.2　逼近格式及其等价形式

若 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d$，方程(3.17)等于

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{U}}_d}{\partial t}+\nu\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_d+\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d)=\boldsymbol{0}\tag{3.18}$$

经过计算，有

$$\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}g(\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d)=\begin{pmatrix}2g(\boldsymbol{Y}^d)+O(|\boldsymbol{Z}^d|^2)\\ O(|\boldsymbol{Z}^d|)\end{pmatrix}$$

舍去 $O(|\boldsymbol{Z}^d|^2)$和 $O(|\boldsymbol{Z}^d|)$，方程(3.18)等于

$$2\frac{\partial\bar{\boldsymbol{U}}_d}{\partial t}+\nu\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{P}_d\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d+2\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}^d)\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\tag{3.19}$$

若 $\boldsymbol{S}=\widetilde{\boldsymbol{P}}_d\widetilde{\boldsymbol{S}}_d\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1}$，方程(3.17)等于

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1}}{\partial t}+\nu\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1})=\boldsymbol{0}\tag{3.20}$$

利用上面的结果，得到

$$2^2\frac{\partial\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1}}{\partial t}+\nu\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1}+2^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}^{d-1})\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

事实上，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1})&=\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{S}}_d^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\widetilde{\boldsymbol{P}}_d\widetilde{\boldsymbol{S}}_d\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1}\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1})\\&=\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\widetilde{\boldsymbol{P}}_d\widetilde{\boldsymbol{S}}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d)\\&=\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}_d\bar{\boldsymbol{U}}_d)\end{aligned}\tag{3.21}$$

根据类似的逼近方法和 $\widetilde{\boldsymbol{S}}_{d-1}$，$\widetilde{\boldsymbol{P}}_{d-1}$的定义，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{U}}_{d-1})&=2\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{d-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{d-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}^d)\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{d-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{d-1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P}_{d-1}\boldsymbol{S}_{d-1}\bar{\boldsymbol{Y}}^d)\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\&=2\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}_{d-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}_{d-1}\bar{\boldsymbol{Y}}^d)\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}^{d-1})\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这样，$(d+1)$层 WBIU 逼近格式为：

$$2^d \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{Z} \end{pmatrix} + \nu \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{S} \bar{\boldsymbol{U}}_1 + 2^d \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{3.22}$$

其中 $\boldsymbol{Y} \in \mathbf{R}^{N \times 2^d N}$，$\boldsymbol{Z} \in \mathbf{R}^{(2^d-1)N \times 2^d N}$.

对时间进行离散，我们提出两种格式：

- 格式Ⅰ：显格式

$$\frac{2^d}{\tau}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}^{n+1} - \boldsymbol{Y}^n \\ \boldsymbol{Z}^{n+1} - \boldsymbol{Z}^n \end{pmatrix} + \nu \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{S} \bar{\boldsymbol{U}}_1^n + 2^d \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}^n) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

- 格式Ⅱ：隐格式

$$\frac{2^d}{\tau}\begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}^{n+1} - \boldsymbol{Y}^n \\ \boldsymbol{Z}^{n+1} - \boldsymbol{Z}^n \end{pmatrix} + \nu \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{S} \bar{\boldsymbol{U}}_1^{n+1} + 2^d \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}^n) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

令 V_{hl}（或 V_l）是由基函数 $w_{h_l,M}(\boldsymbol{x})$，$M=(ih_d, jh_l)$ 张成的空间，$w_{h_l,M}(\boldsymbol{x})$在单元 $K_{ij}^l = [ih_d,(i+1)h_d) \times [jh_l,(j+1)h_l)$中等于1，在其他地方等于0. 令 $u_{h_l,M}(\boldsymbol{x})$是空间 V_l 中的步长函数 u，对于 $\forall \boldsymbol{x} \in K_{ij}^l$，$i=1,2,\cdots,2^d N$，$j=1,2,\cdots,2^l N$，有 $u_{h_l}(\boldsymbol{x}) = u_{h_l}(M)$. 这样

$$u_{h_l}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{2^d N} \sum_{j=1}^{2^{l-1} N} u_{h_l}(M) w_{h_l,M}(\boldsymbol{x})$$

引入下面两个差分算子

$$\nabla_{1h_d} \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h_d}(\Phi(\boldsymbol{x} + h_d \boldsymbol{e}_1) - \Phi(\boldsymbol{x}))$$

$$\nabla_{2hl} \Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{h_l}(\Phi(\boldsymbol{x} + h_l \boldsymbol{e}_2) - \Phi(\boldsymbol{x}))$$

其中，$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，定义离散的向量内积：

$$((u_{h_l}, v_{h_l}))_{h_l} = \varepsilon(\nabla_{1h_d} u_{h_l}, \nabla_{1h_d} v_{h_l}) + (\nabla_{2h_l} u_{h_l}, \nabla_{2h_l} v_{h_l})$$

其中，$(\cdot,\cdot)$ 是 $L^2(\Omega)$中的向量积. 令 $\|\cdot\|_{h_l} = ((\cdot))_{h_l}^{\frac{1}{2}}$，容易看出 $\|\cdot\|_{h_l}$ 和 $|\cdot|$ 是 V_l中的 Helbert 范数.

将差分格式(3.3)写成变分形式

$$\left(\frac{\partial u_{h_d}}{\partial t}, \tilde{u}\right) + \nu((u_{h_d}, \tilde{u}))_{h_d} + (g(u_{h_d}), \tilde{u}) = 0, \quad \forall u \in V_d \tag{3.23}$$

引入记号 $M_{\alpha,\beta} = (\alpha h_d, \beta h_d)$，选择 $\tilde{u} = \boldsymbol{w}_{h_d,M_{ij}}(\boldsymbol{x})$，可以得到格式(3.3). 定义 Y^d 是由基函数 $\boldsymbol{\Psi}_{2h_d,M_{i,2j}}(\boldsymbol{x})$张成的空间，$\boldsymbol{\Psi}_{2h_d,\boldsymbol{M}_{i,2j}}$ 在单元$[ih_d,(i+1)h_d) \times [(2j-1)h_d,(2j+1)h_d)$上等于1，在其他地方为0. 因此，对于 $\forall y^d \in Y^d$，都有

$$y^d(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{2^d N} \sum_{j=1}^{2^{d-1} N} y^d(M_{i,2j}) \boldsymbol{\Psi}_{2h_d,M_{i,2j}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

定义 Z^d是由基函数

$$\chi_{h_d,M_{i,2j-1}}(\boldsymbol{x}) = w_{h_d,M_{i,2j-1}} - w_{h_d,M_{i,2j}}$$

张成的空间，因此，对于 $\forall z \in Z^d$，都有

$$z^d(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{2^d N} \sum_{j=1}^{2^{d-1} N} z^d(M_{i,2j-1}) \chi_{h_d,M_{i,2j-1}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

对于 $\forall z^d \in Z^d$，$\forall y^d \in Y^d$，由 $\Psi_{2h_d,M_{i,2j}}(\boldsymbol{x})$ 和 $\chi_{h_d,M_{i,2j-1}}(\boldsymbol{x})$ 的定义，我们有三个结论：

(1) $\int_\Omega z^d \mathrm{d}x = 0$.

(2) $\int_\Omega z^d y^d \mathrm{d}x = 0$.

(3) Y^d，Z^d 实际上就是式(3.5)所定义的 WBIU 空间.

由结论(3)，空间 V_d 可以被分解为

$$V_d = Y^d \oplus Z^d$$

对于 $\forall u_d \in V_d$，有

$$u_d = y^d + z^d, y^d \in Y^d, z^d \in Z^d$$

利用上述分解，我们有下面的定理：

定理 3.1　令 $M=(ih_d, 2jh_d)$，$A_1=(ih_d,(2j-1)h_d)$，对于 $i=1,2,\cdots,2^dN$，$j=1,2,\cdots,2^{d-1}N$，当 $\tilde{y}=\Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x})$，$\tilde{z}=\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x})$ 时，变分形式

$$\left(\frac{\partial y^d}{\partial t}, \tilde{y}\right) + \nu\left((y^d + z^d, \tilde{y})\right)_{h_d} + (g(y^d), \tilde{y}) = 0, \forall \tilde{y} \in Y^d \tag{3.24}$$

$$\left(\frac{\partial z^d}{\partial t}, \tilde{z}\right) + \nu\left((y^d + z^d, \tilde{z})\right)_{h_d} = 0, \forall \tilde{z} \in Z^d \tag{3.25}$$

也就是式(3.19).

证明：(1) 对于 $i=1,2,\cdots,2^dN$，$j=1,2,\cdots,2^{d-1}N$

当 $\tilde{y}=\Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x})$，可以证明式(3.19)的第一部分的逐点形式为

$$2\frac{\partial y^d_{i,2j}}{\partial t} + \frac{\nu}{h_d^2}(-2y^d_{i,2j} - 2\varepsilon y^d_{i+1,2j} + 2(2+2\varepsilon)y^d_{i,2j} - 2\varepsilon y^d_{i-1,2j} - y^d_{i,2j-2}$$
$$- z^d_{i,2j+1} + z^d_{i,2j-3} - y^d_{i,2j+2}) + 2g(y^d_{i,2j}) = 0 \tag{3.26}$$

下面只需证明当 $\tilde{y}=\Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x})$时，变分形式(3.24)就是(3.26). 事实上，有

$$\left(\frac{\partial y^d}{\partial t}, \tilde{y}\right) = \left(\sum_{k=1}^{2^dN}\sum_{l=1}^{2^{d-1}N}\frac{\partial y^d(M_{k,2l})}{\partial t}\Psi_{2h_d,M_{k,2l}}(\boldsymbol{x}), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x})\right) = 2\frac{\partial y^d_{i,2j}}{\partial t}h_d^2 \tag{3.27}$$

下面，计算 $\nu((y^d+z^d,\tilde{u}))_{h_d}$ 的值. 引入下面的记号：

$$A_1 = (u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1)), A_2 = (u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}))$$

$$A_5 = (u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)), A_6 = (u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}))$$

$$A_3 = (u_d(\boldsymbol{x}), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1)), A_4 = (u_d(\boldsymbol{x}), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}))$$

$$A_7 = (u_d(\boldsymbol{x}), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)), A_8 = (u_d(\boldsymbol{x}), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}))$$

利用步长函数定义，得

$$A_1 = A_4 = A_5 = A_8 = y^d_{i,2j}h_d^2, A_2 = y^d_{i+1,2j}h_d^2, A_3 = y^d_{i-1,2j}h_d^2,$$
$$A_6 = (y^d_{i,2j} + y^d_{i,2j+2} - z^d_{i,2j-1} + z^d_{i,2j+1})h_d^2,$$
$$A_7 = (y^d_{i,2j} + y^d_{i,2j-2} + z^d_{i,2j-1} - z^d_{i,2j-3})h_d^2,$$

利用 $\|\cdot\|_{h_d}$ 的定义，$\nu((y^d+z^d,\tilde{u}))_{h_d}$ 等于

$$\frac{\varepsilon\nu}{h_d^2}(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1) - u_d(\boldsymbol{x}), \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1) - \Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x})) +$$

$$\frac{\nu}{h_d^2}(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)-u_d(\boldsymbol{x}),\Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)-\Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x}))$$
$$=\nu(-2y_{i,2j}^d-2\varepsilon y_{i+1,2j}^d+2(2+2\varepsilon)y_{i,2j}^d-2\varepsilon y_{i-1,2j}^d-y_{i,2j-2}^d-z_{i,2j+1}^d+z_{i,2j-3}^d-y_{i,2j+2}^d) \tag{3.28}$$

最后计算

$$g(y^d(\boldsymbol{x}),\tilde{y})=\left(g\left(\sum_{k=1}^{2^dN}\sum_{l=1}^{2^{d-1}N}y^d(M_{k,2l})\Psi_{2h_d,M_{k,2l}}(\boldsymbol{x})\right),\Psi_{2h_d,M}(\boldsymbol{x})\right)=2g(y_{2i,2j}^d)h_d^2 \tag{3.29}$$

将式(3.27)、式(3.28)和式(3.29)相加,可知变分形式就是式(3.26).

(2) 可以算出式(3.19)的第二部分的逐点形式为

$$2\frac{\partial z_{i,2j-1}^d}{\partial t}+\frac{\nu}{h_d^2}(-y_{i,2j-2}^d+z_{i,2j-3}^d-2\varepsilon z_{i-1,2j-1}^d+2(2+2\varepsilon)z_{i,2j}^d-2\varepsilon z_{i+1,2j-1}^d+2z_{i,2j-1}^d+$$
$$z_{i,2j+2}^d+y_{i,2j+2}^d)=0 \tag{3.30}$$

下面只需证明当 $\tilde{z}=\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x})$ 时,式(3.30)就是式(3.25). 事实上,第一项等于

$$\left(\frac{\partial z^d}{\partial t},\tilde{z}\right)=2z_{i,2j-1}^dh_d^2. \tag{3.31}$$

第二项等于

$$\frac{\varepsilon\nu}{h_d^2}(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1)-u_d(\boldsymbol{x}),\chi_{h_d,A_1}(x+h_d\boldsymbol{e}_1)-\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}))+$$
$$\frac{\nu}{h_d^2}(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)-u_d(\boldsymbol{x}),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)-\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}))$$

下面,计算等式右端部分. 引入记号:

$$B_1=(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1)),B_2=(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}))$$
$$B_5=(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)),B_6=(u_d(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}))$$
$$B_3=(u_d(\boldsymbol{x}),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_1)),B_4=(u_d(\boldsymbol{x}),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}))$$
$$B_7=(u_d(\boldsymbol{x}),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}+h_d\boldsymbol{e}_2)),B_8=(u_d(\boldsymbol{x}),\chi_{h_d,A_1}(\boldsymbol{x}))$$

利用步长函数定义,得

$$B_1=2z_{i,2j-1}^dh_d^2,B_2=z_{i+1,2j-1}^dh_d^2,B_3=2z_{i-1,2j-1}^dh_d^2$$
$$B_5=2z_{i,2j-1}^dh_d^2,B_4=z_{i,2j-1}^dh_d^2,B_8=2z_{i,2j-1}^dh_d^2$$
$$B_6=(y_{i,2j}^d-y_{i,2j+2}^d-z_{i,2j-1}^d-z_{i,2j+1}^d)h_d^2$$
$$B_7=(-y_{i,2j}^d+y_{i,2j-2}^d-z_{i,2j-1}^d-z_{i,2j-3}^d)h_d^2$$

经过计算,第二项等于

$$\nu(-2y_{i,2j-2}^d+z_{i,2j-3}^d-2\varepsilon z_{i,2j-1}^d+2(2+2\varepsilon)z_{i,2j-1}^d-2\varepsilon z_{i+1,2j-1}^d+y_{i,2j+2}^d+z_{i,2j+1}^d) \tag{3.32}$$

将式(3.31)和式(3.32)相加,易知式(3.30)就是变分形式(3.25). 定理证毕.

类似地,将 $Y^l,l=d,\cdots,1$ 作如下分解

$$Y^{l+1}=Y^l\oplus Z^l$$

就等到了多层分块类小波增量未知元(WBIU). 这里,要注意的是 $Y^{d+1}=V_d$. 因此,对于

$\forall u_d \in V_d$，我们有

$$u_d = y + z,\quad y \in y^1 \in Y,\quad z \in z = Z^1 \oplus Z^2 \oplus \cdots \oplus Z^d$$

和定理 3.1 类似，我们可以证明式(3.22)等价于下面的变分形式：

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, \tilde{y}\right) + \nu\,((y + z, \tilde{y}))_{h_d} + (g(y + z), \tilde{y}) = 0, \forall \tilde{y} \in Y$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}, \tilde{z}\right) + \nu\,((y + z, \tilde{z}))_{h_d} = 0, \forall \tilde{z} \in Z \tag{3.33}$$

3.3　关于范数的三个引理

证明稳定性分析之前，首先介绍几个引理.

引理 3.1　对于任意函数 g，都能找到这样的两个正常数 c_1 和 c_2，使得：

$$g(s) \geqslant \frac{1}{2} b_{2q-1} s^{2q} - c_1$$

$$g(s)^2 \leqslant 2b_{2q-1}^2 s^{4q-2} + c_2,\quad \forall s$$

引理 3.2　设 l 为整数，对于 $0 \leqslant l \leqslant d$，任意函数 $u_{h1} \in V_l$，

$$\sqrt{2(1+\varepsilon)} \cdot |u_{h_l}| \leqslant \| u_{h_l} \|_{h_l} \leqslant S_l(l)^{-1} \cdot |u_{h_l}| \tag{3.34}$$

其中 $S_1(l) = h_d\,(4\varepsilon + 4^{l-d+1})^{-\frac{1}{2}}$.

引理 3.3　任意函数 $y \in Y$，

$$S_2(h_1, h_d)\ |y|_\infty^2 \leqslant |y|^2,\quad S_2(h_1, h_d) = h_1 h_d$$

$$\overline{S}(h_1, h_d)\ \| y \|_{h_d} \leqslant |y|,\quad \overline{S_1}(h_1, h_d) = \frac{\sqrt{h_1 h_d}}{\sqrt{4\varepsilon 2^d + 4}}$$

这里$|\cdot|_\infty$表示最大范数.

3.4　显格式和半隐格式的稳定性估计

定理 3.2　(格式 Ⅰ 的稳定性估计)假设对于某个固定的 τ_0，有 $\tau \leqslant \tau_0$，

$$\frac{\tau}{h_d^2} \leqslant \frac{3 \cdot 2^d}{16\nu(1 + 2 \cdot 2^d)},\quad \frac{\tau}{h_d^{2(q-1)}} \leqslant \frac{2^{d(q-1)}}{4b_{2q-1} M_0^{q-1}}, \tag{3.35}$$

其中

$$M_0 = |u_{h_d}^0|^2 + \frac{2}{\nu}(c_1 + \tau_0 c_2)\,|\Omega|$$

那么，对于任意的 $n \geqslant 0$，我们有下面的估计式成立：

$$|u_{h_d}^n|^2 = |y^n|^2 + |z^n|^2 \leqslant M_0 \tag{3.36}$$

证明：容易看出，格式 Ⅰ 等价于下面的变分形式：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y^{n+1} - y^n}{\tau}, \tilde{y}\right) + \nu((y^n + z^n, \tilde{y}))_{h_d} + (g(y^n), \tilde{y}) = 0, & \forall \tilde{y} \in Y \\ \left(\dfrac{z^{n+1} - z^n}{\tau}, \tilde{z}\right) + \nu((y^n + z^n, \tilde{z}))_{h_d} = 0, & \forall \tilde{z} \in Z \end{cases} \tag{3.37}$$

在方程(3.37)中令 $\tilde{y}=2\tau y^n, \tilde{z}=2\tau z^n$，把这两个式子相加，利用关系式 $2(a-b,b)=|a|^2-|b|^2-|a-b|^2$，我们有

$$\Gamma_0-|y^{n+1}-y^n|^2-|z^{n+1}-z^n|^2+2\tau\nu\ \|y^n+z^n\|_{h_d}^2+2\tau(g(y^n),y^n)=0$$

其中 $\Gamma_0=|y^{n+1}|^2-|y^n|^2+|z^{n+1}|-|z^n|^2$. 利用引理 3.1，得到

$$\Gamma_0-|y^{n+1}-y^n|^2-|z^{n+1}-z^n|^2+2\tau\nu\ \|y^n+z^n\|_{h_d}^2+\tau b_{2q-1}\int_\Omega(y^n)^{2q}\mathrm{d}x\leqslant 2\tau c_1|\Omega| \tag{3.38}$$

在式(3.37)的第一个方程中令 $\tilde{y}=\tau(y^{n+1}-y^n)$，有

$$|y^{n+1}-y^n|^2+\tau\nu((y^n+z^n,y^{n+1}-y^n))_{h_d}+\tau(g(y^n),y^{n+1}-y^n)=0$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 3.3，有

$$\begin{aligned}|y^{n+1}-y^n|^2&\leqslant\tau\nu\ \|y^n+z^n\|_{h_d}\ \|y^{n+1}-y^n\|_{h_d}+\tau|g(y^{n+1})|\ |y^{n+1}-y^n|\\&\leqslant\tau\nu\frac{1}{S_1(h_1,h_d)}\ \|y^n+z^n\|_{h_d}|y^{n+1}-y^n|+\\&\quad\tau^2|g(y^n)|^2+\frac{1}{4}|y^{n+1}-y^n|^2\\&\leqslant\frac{1}{2}|y^{n+1}-y^n|^2+\tau^2|g(y^n)|^2+\frac{\tau^2\nu^2}{S_1(h_1,h_d)^2}\ \|y^n+z^n\|_{h_d}^2\end{aligned}$$

因此，

$$|y^{n+1}-y^n|^2\leqslant 2\tau^2|g(y^n)|^2+\frac{2\tau^2\nu^2}{S_1(h_1,h_d)^2}\ \|y^n+z^n\|_{h_d}^2 \tag{3.39}$$

现在在(3.37)的两个方程中令 $\tilde{z}=\tau(z^{n+1}-z^n)$有

$$|z^{n+1}-z^n|^2+\tau v((y^n+z^n,z^{n+1}-z^n))_{h_d}=0$$

使用引理 3.2 令 $l=d$，

$$|z^{n+1}-z^n|^2\leqslant\tau v\|y^n+z^n\|_{hd}\|z^{n+1}-z^n\|_{h_d}\leqslant\frac{\tau\nu}{S_1(d)}\|y^n+z^n\|_{h_d}|z^{n+1}-z^n| \tag{3.40}$$

因此

$$|z^{n+1}-z^n|^2\leqslant\frac{\tau^2\nu^2}{S_1(d)^2}\|y^n+z^n\|_{h_d}^2 \tag{3.41}$$

将式(3.38)、式(3.39)和式(3.40)结合在一起，使用 $S_1(d)$的表达式，我们得到

$$\Gamma_0+\Gamma_1(\varepsilon)\|y^n+z^n\|_{h_d}^2+\tau b_{2q-1}\int_\Omega(y^n)^{2q}\mathrm{d}x\leqslant 2\tau c_1|\Omega|+2\tau^2|g(y^n)|^2$$

其中

$$\Gamma_1(\varepsilon)=2\tau\nu-\frac{4(\varepsilon+1)\tau^2\nu^2}{h_d^2}-\frac{8\tau^2\nu^2(2^d\varepsilon+1)}{2^dh_d^2}$$

利用(3.35)的第一个条件，有 $\Gamma_1(\varepsilon)>0$. 利用引理 3.1 和引理 3.3，我们有

$$\tau^2|g(y^n)|^2\leqslant\frac{2\tau^2b_{2q-1}^2}{2^{d(q-1)}h_d^{2(q-1)}}|y^n|^{2q-2}\int_\Omega(y^n)^{2q}\mathrm{d}x+\tau^2c_2|\Omega| \tag{3.42}$$

又因为 $\| y^n + z^n \|_{h_d}^2 > 2 | y^n + z^n |^2$，

$$\Gamma_0 + 2\Gamma_1(\varepsilon) \, | y^n + z^n |^2 + \tau b_{2q-1}(1 + 2\Gamma_2) \int_\Omega (y^n)^{2q} \mathrm{d}x \leqslant \Gamma_3$$

其中

$$\Gamma_2 = -\frac{2\tau b_{2q-1}}{2^{d(q-1)} h_d^{2(q-1)}} \, | y^n |^{2q-1}, \quad \Gamma_3 = (2\tau c_1 + 2\tau^2 c_2) \, | \Omega |$$

由 $0 < \varepsilon \ll 1$，可以得到

$$\Gamma_0 + 2\Gamma_1(1) \, | y^n + z^n |^2 + \tau b_{2q-1}(1 + 2\Gamma_2) \int_\Omega (y^n)^{2q} \mathrm{d}x \leqslant \Gamma_3$$

下面使用数学归纳法证明(3.36)式.

（Ⅰ）$k=0$ 成立因为 $|y^0|^2 + |z^0|^2 \leqslant M_0$

（Ⅱ）假设(3.36)对于 $k=n$ 成立，也就是 $|y^n|^2 + |z^n|^2 \leqslant M_0$

（Ⅲ）对于 $k=n+1$，利用(3.35)的第二个条件和(3.33)，我们有

$$|y^{n+1}|^2 - |y^n|^2 + |z^{n+1}|^2 - |z^n|^2 + \tau\nu \, |y^n + z^n|^2 \leqslant \Gamma_3$$

注意到 $|y^n + z^n|^2 = |y^n|^2 + |z^n|^2$，

$$|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2 \leqslant (1 - \tau\nu)(|y^n|^2 + |z^n|^2) + \Gamma_3$$

也就是

$$\begin{aligned}
|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2 &\leqslant (1-\tau\nu)^{n+1}(|y^0|^2 + |z^0|^2) + \Gamma_3 \sum_{i=0}^{n} (1-\tau\nu)^i \\
&\leqslant (1-\tau\nu)^{n+1}(|y^0|^2 + |z^0|^2) + \frac{1}{\tau\nu}\Gamma_3 \\
&= (1-\tau\nu)^{n+1}(|y^0|^2 + |z^0|^2) + \frac{2}{\nu}(c_1 + \tau_0 c_2) \, |\Omega| \\
&\leqslant M_0
\end{aligned}$$

稳定性估计(3.36)证毕.

为了证明格式Ⅱ的稳定性，首先介绍下面的引理.

引理 3.4　（离散的 Gornwall 引理）假设 $\tau > 0$ 和 $1 + \tau\lambda > 0$，a^n，b^n 分别是两个非负序列，满足

$$\frac{a^{n+1} - a^n}{\tau} + \lambda a^{n+1} \leqslant b^n, \quad b^n \leqslant b, \, \forall \, n \geqslant 0$$

那么有

$$a^n \leqslant \frac{1}{(1+\tau\lambda)^n} a^n + \frac{1+\tau\lambda}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{(1+\tau\lambda)^{n+1}}\right) b, \quad \forall \, n \geqslant 0$$

定理 3.3　（格式Ⅱ的稳定性估计）假设对于某个固定的 τ_0，$\tau \leqslant \tau_0$，若

$$\frac{\tau}{h_d^{2(q-1)}} \leqslant \frac{2^{d(q-1)}}{2 b_{2q-1} M_1^{q-1}} \tag{3.43}$$

其中

$$M_1 = |u_{h_d}^0| + \frac{1 + 4\tau_0\nu}{4\nu}(2c_1 + \tau_0 c_2) \, |\Omega|$$

那么下面的估计式成立：

$$|u_{h_d}^n|^2 = |y^n|^2 + |z^n|^2 \leqslant M_1, \quad 对所有的\ n \geqslant 0 \tag{3.44}$$

证明：要证明格式Ⅱ是稳定的，只需证明下面的变分形式：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y^{n+1}-y^n}{\tau}, \tilde{y}\right) + \nu((y^{n+1}+z^{n+1}, \tilde{y}))_{h_d} + (g(y^n), \tilde{y}) = 0, & \forall \tilde{y} \in Y, \\ \left(\dfrac{z^{n+1}-z^n}{\tau}, \tilde{z}\right) + \nu((y^{n+1}+z^{n+1}, \tilde{z}))_{h_d} = 0, & \forall \tilde{z} \in Z \end{cases} \tag{3.45}$$

是稳定的. 在方程(3.45)中令 $\tilde{y}=2\tau y^{n+1}, \tilde{z}=2\tau z^{n+1}$，然后将二者相加，利用 $2(a-b,a)=|a|^2-|b|^2+|a-b|^2$，得到下式

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 + |y^{n+1}-y^n|^2 + |z^{n+1}-z^n|^2 + 2\tau\nu \| y^{n+1}+z^{n+1} \|_{h_d}^2 \\ &= -2\tau(g(y^n), y^{n+1}-y^n) - 2\tau(g(y^n), y^n) \\ &\leqslant -2\tau(g(y^n), y^{n+1}-y^n) - \tau b_{2q-1}\int_\Omega (y^n)^{2q}\mathrm{d}x + 2\tau c_1 |\Omega| \end{aligned}$$

这里 $\Gamma_0 = |y^{n+1}|^2 - |y^n|^2 + |z^{n+1}|^2 - |z^n|^2$。整理上式得到

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 + |y^{n+1}-y^n|^2 + |z^{n+1}-z^n|^2 + 2\tau\nu \| y^{n+1}+z^{n+1} \|_{h_d}^2 + \\ &\tau b_{2q-1}\int_\Omega (y^n)^{2q}\mathrm{d}x + 2\tau c_1 |\Omega| \leqslant -2\tau(g(y^n), y^{n+1}-y^n) + 2\tau c_1 |\Omega| \end{aligned} \tag{3.46}$$

由于(3.42)和

$$\begin{aligned} -2\tau(g(y^n), y^{n+1}-y^n) &\leqslant 2\tau |g(y^n)| |y^{n+1}-y^n| \\ &\leqslant |y^{n+1}-y^n|^2 + \tau^2 |g(y^n)|^2 \end{aligned}$$

有下式成立：

$$\begin{aligned} &\Gamma_0 + |z^{n+1}-z^n|^2 + 2\tau\nu \| y^{n+1}+z^{n+1} \|_{h_d}^2 + \\ &\tau b_{2q-1}(1-\Gamma_2)\int_\Omega (y^n)^{2q}\mathrm{d}x \leqslant 2\tau c_1 |\Omega| + \tau^2 c_2 |\Omega| \end{aligned}$$

利用引理 3.2 和条件(3.43)，我们得到

$$\Gamma_0 + 4\tau\nu |y^{n+1}+z^{n+1}| \leqslant 2\tau c_1 |\Omega| + \tau^2 c_2 |\Omega|$$

因为 $|y^{n+1}+z^{n+1}|^2 = |y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2$，上面的不等式变为

$$\frac{\Gamma_0}{\tau} + 4\nu(|y^{n+1}|^2 + |z^{n+1}|^2) \leqslant 2c_1 |\Omega| + \tau c^2 |\Omega|$$

使用离散的 Gronwall 引理可知

$$|y^n|^2 + |z^n|^2 \leqslant \frac{|y^0|^2 + |z^0|^2}{(1+4\tau\nu)^2} + \frac{1+4\tau\nu}{4\nu}\left(1 - \frac{1}{(1+4\tau\nu)^{n+1}}\right)(2c_1 + \tau_0 c_2)|\Omega|$$

因此，

$$|y^n|^2 + |z^n|^2 \leqslant \frac{|y^0|^2 + |z^0|^2}{(1+4\tau\nu)^n} + \frac{1+4\tau\nu}{4\nu}(2c_1 + \tau_0 c_2)|\Omega|$$

稳定性估计(3.44)成立.

3.5　数值结果

考虑下面的方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}-\left(\varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+u^3=f, & (x,y)\in\Omega,t\in(0,1] \\
u(x,y,0)=(1-x)\sin(\pi y)(e^{-x/\sqrt{\varepsilon}-1}-1), & (x,y)\in\Omega,t\in 0 \\
u(x,y,t)=0 & (x,y)\in\partial\Omega,t\in(0,1]
\end{cases}
$$

其中

$$
f=(1-x)\sin(\pi y)e^t(e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}-1)-(2\sqrt{\varepsilon}\sin(\pi y)e^{t-x/\sqrt{\varepsilon}}+(1-x)\sin(\pi y)e^{t-x/\sqrt{\varepsilon}})+
(1-x)\sin(\pi y)\pi^2e^t(e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}-1)+((1-x)\sin(\pi y)e^t(e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}-1))^3
$$

$\Omega=(0,1)^2$，方程的精确解是 $(1-x)\sin(\pi y)e^t(e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}-1)$.

分别使用 WIU 和 WBIU 求解上面的方程. 我们发现，当 ε 很小的情况下，使用 WBIU 方法得到的系数矩阵的条件数要远远小于使用 WIU 方法得到的系数矩阵的条件数. 表 3.1 和图 3.1 分别给出了当 ε 和层数 d 分别取不同值时，系数矩阵条件数的比较. 从表 3.2 和表 3.3 可以看出，使用 WBIU 方法的 CPU 时间要远远小于 WIU 方法使用的 CPU 时间. 图 3.2 和图 3.3 分别给出了在 $\varepsilon=0.1,0.01$，$N=1$ 和 $d=4$ 时，使用半隐格式和显格式的误差估计比较. 从图形可以看出，虽然，使用者两种方法达到的精度基本相同，但是，基于 WBIU 的数值格式节省了大量的 CPU 时间.

表 3.1　系数矩阵条件数的比较

ε	0.1	0.01	0.001
WBIU	23.622	21.859	21.682
WIU	706.67	1247.5	1357.3

表 3.2　半隐格式 CPU 时间的比较

ε	0.1	0.01	0.001
WBIU	115.33	97.391	83.359
WIU	371.86	450.98	453.98

表 3.3　显格式 CPU 时间的比较

ε	0.1	0.01	0.001
WBIU	1193	1218	1197
WIU	2363	2393	2338

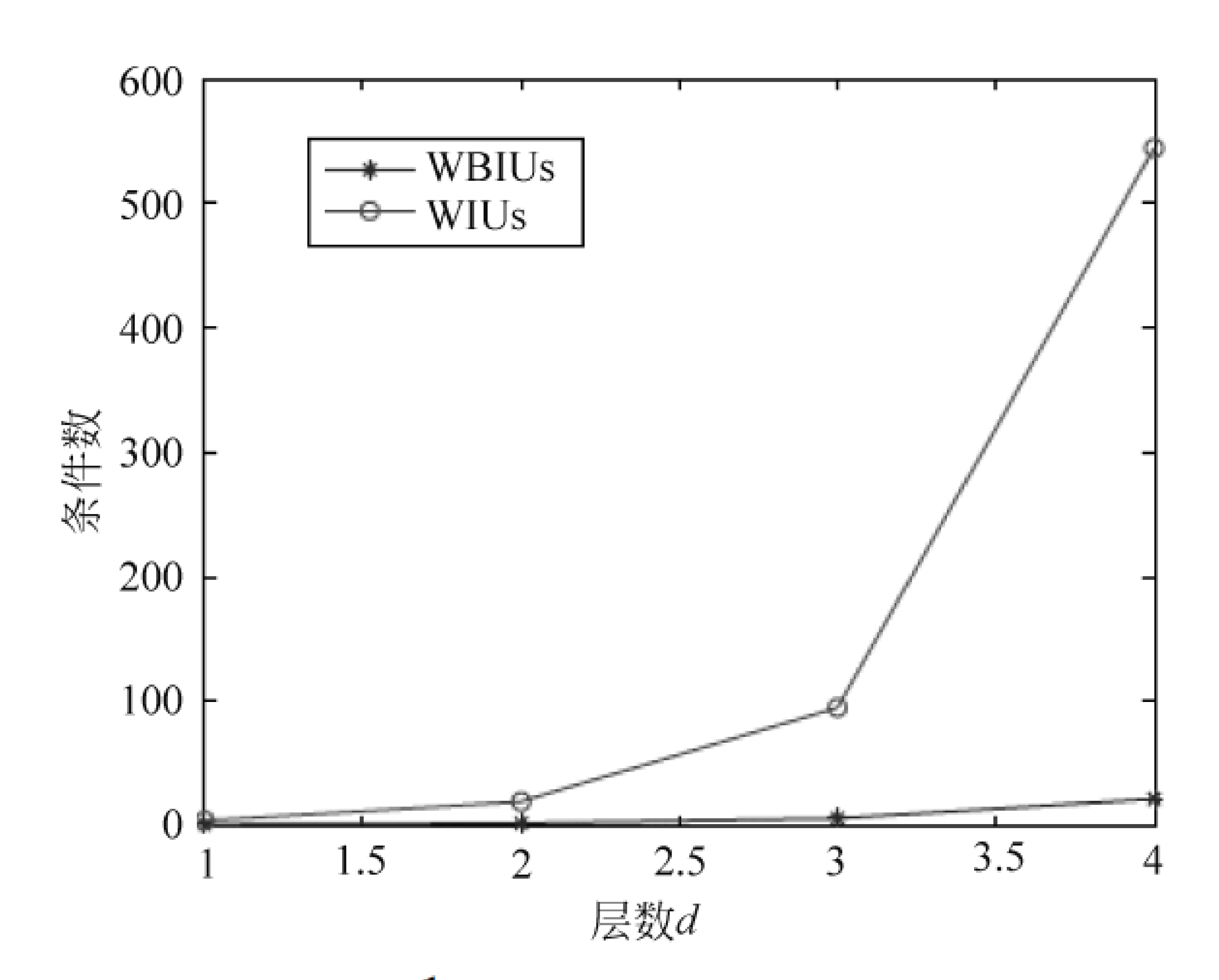


图 3.1　$\varepsilon=0.001, \tau=\dfrac{1}{200}$时 WIU 和 WBIU 系数矩阵条件数的比较

ε=0.1, t=0.5

ε=0.1, t=1

ε=0.01, t=0.5

ε=0.01, t=1

图 3.2　$\tau=1/200, d=4, N=1$ 时，WIU 和 WBIU 在半隐格式下的误差曲面图

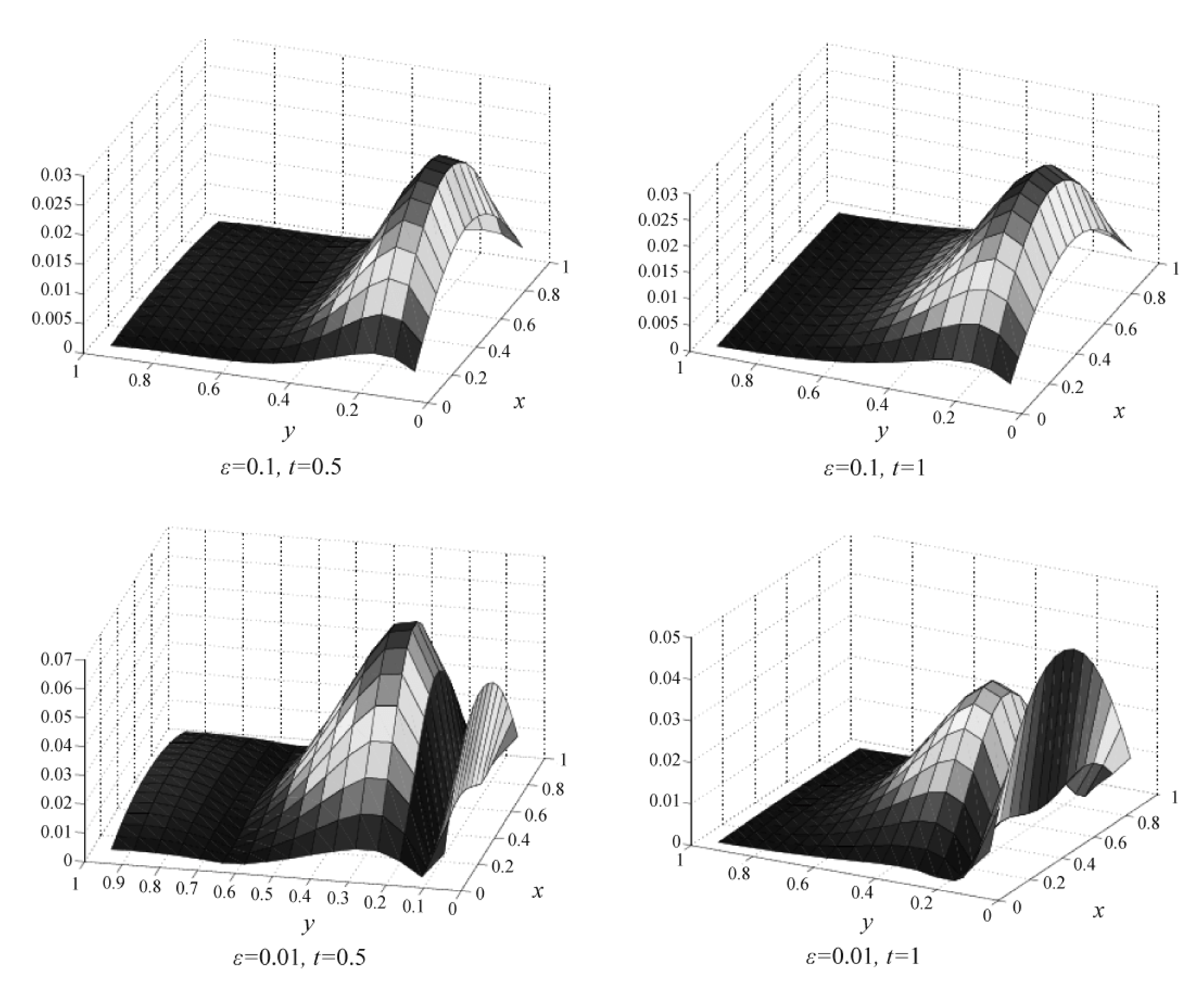


图 3.3　$\tau=1/2000, d=4, N=1$ 时，WIU 和 WBIU 在显格式下的误差曲面图

第 4 章

非埃尔米特正定线性系统的迭代方法

4.1 简介

在科学与工程的很多重要领域中,经常要求解下列大型稀疏线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{b} \in \mathbf{C}^n \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为大型稀疏矩阵,通常是几十万阶,几百万阶,甚至更多.

对于这种大型稀疏线性方程组,我们通常采用迭代法求解. 当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定矩阵时,最有效的方法之一就是共轭梯度法. 而对于更一般的对称系统,Paige 和 Saunder 提出了 MINRES 方法,即利用对称 Lanczos 基来计算一个方程的近似解,并使得残向量在 Krylov 子空间上最小. 1986 年,Y. Saad 和 M. H. Sehultz 进一步推广了此方法,提出了 GMRES 算法,用来求解非对称线性系统. 而在解决实际问题时,常常会遇到这样的情况:尽管迭代矩阵的谱半径小于 1 但却非常接近于 1,此时定常迭代法的收敛速度会非常缓慢,效果并不好,甚至不收敛;当系数矩阵的谱分布很分散时,非定常迭代法的收敛速度也很慢,甚至不收敛. 因此,迭代法的求解速度经常被线性代数系统系数矩阵的性质所制约而不能实现快速求解. 为了解决这一问题,人们提出了预处理技术,预处理技术是指对线性代数系统的系数矩阵进行处理,进而使处理后的线性代数系统易于求解的技术. 经常采用的方法就是在方程两边同时乘以一个非奇异矩阵的逆,然后再用迭代法来求解. 利用预处理技术可达到使定常迭代法迭代矩阵的谱半径变小、线性代数系统系数矩阵的谱分布更加集中等目的. 近年来,人们不断提出各种新的预处理技术,而今,预处理技术和迭代法已密不可分,预条件技术作为加快迭代法收敛速度的有效方法,在求解线性代数系统的过程中扮演着越来越重要的角色.

本章在已有的成果基础上,基于大型稀疏非埃尔米特正定线性系统的正规/反对称分裂(NSS)方法,提出了预条件正规/反对称分裂(Preconditioned Normal/skew-Hernitian Splitting,PNSS)迭代方法及其变形和两参数预处理 NSS 迭代策略. 理论分析表明,在一定条件下,这些迭代格式是收敛的,除此之外,给出了迭代格式中参数和迭代矩阵谱半径的最小上界的计算方法. 在数值实验中,选取增量未知元(IU)和对称逐次超松弛(Symetric Successive Over Relaxation,SSOR)两种预处理矩阵. 数值结果证明了收敛定理的正确性和方法的有效性.

4.2　非埃尔米特正定线性系统的预条件 NSS 方法

4.2.1　预条件正规/反对称分裂(PNSS)迭代方法的建立

为了提高 NSS 方法的收敛速率,我们将 NSS 方法进行改进,将 NSS 迭代格式用于求解下面的预条件线性方程组

$$\hat{A}\hat{x} = \hat{b} \tag{4.2}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{R}^{-*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}$,$\hat{x}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}$,$\hat{b}=\boldsymbol{R}^{-*}\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{R}\in\mathbf{C}^{n\times n}$是某个指定的预处理矩阵,$\boldsymbol{R}^{-*}=(\boldsymbol{R}^{-1})^{*}$是 $\boldsymbol{R}^{-1}$的共轭转置. 通常,取矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{R}^{*}\boldsymbol{R}$,得到预条件正规/反对称分裂(PNSS)格式.

PNSS 迭代方法:给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^{n}$,对于 $k=0,1,2,\cdots$,直到$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛,计算

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\\ (\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}\end{cases} \tag{4.3}$$

其中 $\alpha>0$,$\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$是一个埃尔米特正定矩阵.

注 4.1　从迭代格式可以看出,当 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,PNSS 迭代格式退化为 NSS 迭代格式.

下面我们重点讨论 PNSS 方法的收敛性.

4.2.2　PNSS 迭代方法收敛性分析

PNSS 迭代格式可以等价地写成如下形式:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}(\alpha)\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{N}(\alpha)\boldsymbol{b},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{4.4}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\alpha) &= (\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})\\ \boldsymbol{N}(\alpha) &= 2\alpha(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}\end{aligned} \tag{4.5}$$

这里,$\boldsymbol{M}(\alpha)$为 PNSS 迭代的迭代矩阵. 由经典的迭代理论可知,要证明 PNSS 迭代格式是收敛的,只须证明迭代矩阵的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))<1$.

由于 $\boldsymbol{S}$ 为反对称矩阵,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^{*})^{-1}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}^{-1}((\boldsymbol{R}^{*})^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{-1})\boldsymbol{R}$,可知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$ 所有的特征值均为虚数. 设 Θ_2 为矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$ 特征值的集合,$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的第 j 个特征值为 $\mathrm{i}e_j(j=1,2,\cdots,n)$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 我们可以得到 PNSS 迭代方法的收敛性定理.

定理 4.1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$是正定矩阵,$\boldsymbol{N}\in\mathbf{C}^{n\times n}$是正规矩阵,$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{n\times n}$是反对称矩阵,并且满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$. $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$是埃尔米特正定矩阵. Θ_1 为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N}$ 特征值的集合. $\alpha>0$ 为正常数. PNSS 方法迭代矩阵的谱半径则满足下面的不等式

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\sigma(\alpha)<1,\quad\forall\,\alpha>0, \tag{4.6}$$

其中

$$\sigma(\alpha) = \max_{\lambda_j\in\Theta_1}\frac{|\alpha-\lambda_j|}{|\alpha+\lambda_j|} = \max_{\lambda_j=\gamma_j+\mathrm{i}\eta_j}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma_j)^2+\eta_j^2}{(\alpha+\gamma_j)^2+\eta_j^2}}, \tag{4.7}$$

这里,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 即由 PNSS 方法得到的迭代序列$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛到线性方程组(4.1)的解 $\boldsymbol{x}^{*}$.

除此之外，$\gamma_{\min}$ 和 $\gamma_{\max}$，$\eta_{\min}$ 和 $\eta_{\max}$ 分别表示 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的特征值实部绝对值的最小值和最大值，虚部绝对值的最小值和最大值，$\Omega=[\gamma_{\min},\gamma_{\max}]\times[\eta_{\min},\eta_{\max}]$，有

$$\alpha^* \equiv \arg\min_{\alpha}\left\{\max_{(\gamma,\eta)\in\Omega}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)^2+\eta^2}{(\alpha+\gamma)^2+\eta^2}}\right\}=\begin{cases}\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}, & \eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\\ \sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}, & \eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\end{cases} \tag{4.8}$$

相应地，

$$\sigma(\alpha^*)=\begin{cases}\left(\dfrac{\gamma_{\min}+\gamma_{\max}-2\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}}{\gamma_{\min}+\gamma_{\max}+2\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\\ \left(\dfrac{\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}-\gamma_{\min}}{\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}+\gamma_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\end{cases} \tag{4.9}$$

证明：由矩阵范数的相似不变性，有

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{M}(\alpha)) &= \rho((\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1})\\ &\leqslant \|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})^{-1})(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})^{-1})\|_2\\ &\leqslant \|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})^{-1})\|_2\,\|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})^{-1})\|_2\end{aligned}$$

又因为 $\|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})^{-1})\|_2=\max\limits_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\left|\dfrac{\alpha-\mathrm{i}e_j}{\alpha+\mathrm{i}e_j}\right|=1$. 因此

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{M}(\alpha)) &\leqslant \|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})^{-1}\|_2\\ &\leqslant \max_{\lambda_j\in\Theta_1}\left|\frac{\alpha-\lambda_j}{\alpha+\lambda_j}\right| = \max_{\lambda_j=\gamma_j+i\eta_j\in\Theta_1}\left|\frac{\alpha-(\gamma_j+i\eta_j)}{\alpha+(\gamma_j+i\eta_j)}\right|\\ &= \max_{\lambda_j=\gamma_j+i\eta_j\in\Theta_1}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma_j)^2+\eta_j^2}{(\alpha+\gamma_j)^2+\eta_j^2}}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N}$ 为正定矩阵，可知 λ_j 的实部 $\gamma_j>0$. 又因为 $\alpha>0$，易看出 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\sigma(\alpha)$. 下面计算使得 PNSS 迭代矩阵谱半径上界 $\sigma(\alpha)$ 取得最小值时参数 α 的值.

注意到，函数 $\dfrac{(\alpha-\gamma)^2+\eta^2}{(\alpha+\gamma)^2+\eta^2}$ 为关于 η 的单调递增函数，我们有

$$\max_{(\gamma,\eta)\in\Omega}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)^2+\eta^2}{(\alpha+\gamma)^2+\eta^2}}=\max_{\gamma_{\min}<\gamma<\gamma_{\max}}\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma)^2+\eta_{\max}^2}}$$

$$=\begin{cases}\max\left\{\sqrt{\dfrac{(\alpha-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}},\sqrt{\dfrac{(\alpha-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\right\}, & \eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\\ \sqrt{\dfrac{(\alpha-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}, & \eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}\end{cases}$$

如果 α^* 是 $\sigma(\alpha)$ 的最小值点，那么我们有下列结论成立：

(1) 当 $\eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}$ 时，有

$$\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}=\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}} \tag{4.10}$$

解式(4.10)，得到 $\alpha^*=\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}$

(2) 当 $\eta_{\max} \geqslant \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{(\alpha-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}\right)=0 \tag{4.11}$$

解式(4.11)，得到 $\alpha^* = \sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}$.

综上所述，我们有

$$\alpha^* = \begin{cases} \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}, & \eta_{\max} < \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}} \\ \sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}, & \eta_{\max} \geqslant \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}} \end{cases} \tag{4.12}$$

将 α^* 代入 $\sqrt{\dfrac{(\alpha-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}$ 中，得到

$$\sigma(\alpha^*) = \begin{cases} \left(\dfrac{\gamma_{\min}+\gamma_{\max}-2\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}}{\gamma_{\min}+\gamma_{\max}+2\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}-\eta_{\max}^2}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \eta_{\max} < \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}} \\ \left(\dfrac{\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}-\gamma_{\min}}{\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}+\gamma_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}, & \eta_{\max} \geqslant \sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}} \end{cases} \tag{4.13}$$

定理证毕.

注 4.2　对于预处理矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的选取，首先应保证它是对称正定矩阵，其次，尽量使得 PNSS 迭代矩阵谱半径越小越好. 在数值试验中，我们选取了增量未知元和 SSOR 两种预处理矩阵，给出了迭代矩阵谱半径在预处理前后的比较.

4.2.3　不精确的预条件正规/反对称分裂(IPNSS)迭代及其收敛性分析

在 PNSS 迭代过程中，每一步迭代需要求解两个子线性方程组. 当系数矩阵为大型稀疏矩阵时，如果要精确算出它们的解，费时费力. 为了提高 PNSS 迭代格式的效率，我们对这两个线性方程组进行迭代近似求解，并把这种迭代方法称为不精确的 PNSS (IPNSS)迭代方法.

不精确的 PNSS(IPNSS)迭代方法：给定一个初值 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)} \in \mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}$收敛，以 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ 为初值，利用某种迭代方法(比如 CG 方法)近似计算 $(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})} \approx (\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}+\boldsymbol{b}$ 的解，得到 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}$；然后以 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}$ 为初值，利用某种迭代方法(比如 Krylov 子空间方法)近似计算 $(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} \approx (\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}$ 的解，得到 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}$.

为了简化数值计算和收敛性分析，将 IPNSS 迭代格式写成如下等价形式：

给定一个初值 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)} \in \mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到$\{\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}$收敛.

(1) 近似求解线性方程组$(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k)} \approx \bar{\boldsymbol{r}}^{(k)} = (\bar{\boldsymbol{r}}^{(k)} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)})$直到残量 $\bar{\boldsymbol{p}}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{r}}^{(k)} - (\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k)}$ 满足 $\|\bar{\boldsymbol{p}}^{(k)}\| \leqslant \varepsilon_k \|\bar{\boldsymbol{r}}^{(k)}\|$，然后计算 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})} = \bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} + \bar{\boldsymbol{z}}^{(k)}$.

(2) 近似求解线性方程组$(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k+\frac{1}{2})} \approx \bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})}$ $(\bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})})$直到残量 $\bar{\boldsymbol{q}}^{(k+\frac{1}{2})} = \bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})} - (\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k+\frac{1}{2})}$ 满足 $\|\bar{\boldsymbol{q}}^{(k+\frac{1}{2})}\| \leqslant \eta_k \|\bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})}\|$，然后计算 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} = \bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})} + \bar{\boldsymbol{z}}^{(k+\frac{1}{2})}$.

利用矩阵分裂

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{N}_1 \equiv (\alpha\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}) - (\alpha\boldsymbol{P} - \boldsymbol{S}) \\ &= \boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{N}_2 \equiv (\alpha\boldsymbol{P} + \boldsymbol{S}) - (\alpha\boldsymbol{P} - \boldsymbol{N})\end{aligned}$$

引入下面范数

$$|||\boldsymbol{x}|||_{\boldsymbol{M}} = \|\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}\|,$$

其诱导范数为

$$|||\boldsymbol{X}|||_{\boldsymbol{M}} = \|\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}\boldsymbol{M}^{-1}\|, \quad 对于所有\ \boldsymbol{X} \in \mathbf{C}^{n\times n}$$

这时，若令 $\boldsymbol{M}=\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}$，则得到下面的 IPNSS 收敛定理.

定理 4.2 令 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正定矩阵，$\boldsymbol{N}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正规矩阵，$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个反对称矩阵，并且满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$. $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个埃尔米特正定矩阵. $\boldsymbol{x}^*\in\mathbf{C}^n$ 为线性方程组(4.1)的解. 若 $\{\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}$ 为 IPNSS 方法得到的迭代序列，则有下式成立：

$$|||\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^*||| \leqslant (\sigma(\alpha) + \theta\rho\eta_k)(1 + \theta\varepsilon_k)\,|||\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*|||, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

其中 $|||\boldsymbol{x}|||$ 代表 $|||\boldsymbol{x}|||_{(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})}$，$\rho=\|(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}\|_2$，$\theta=\|\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2$.

特别地，如果 $(\sigma(\alpha)+\theta\rho\eta_{\max})(1+\theta\varepsilon_{\max})<1$，那么迭代序列 $\{\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}$ 收敛到线性方程组(4.1)的解 $\boldsymbol{x}^*$，这里，$\varepsilon_{\max}=\max\limits_k\{\varepsilon_k\}$，$\eta_{\max}=\max\limits_k\{\eta_k\}$.

4.2.4 数值算例

例 4.1 求解下面的反应扩散方程

$$\begin{cases} -(u_{xx} + u_{yy}) + bu_x = f, & (x,y) \in \Omega \\ u = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $b>0$ 是一个常数，$\Omega=(0,1)^2$. 使用网格步长为 h 的五点离散格式：

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}) + \frac{b}{2h}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) = f_{ij},$$

这里 u_{ij} 和 f_{ij} 分别表示 u 和 f 的近似值，得到下面的线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{f} \tag{4.14}$$

和矩阵的 HS 分裂不同，对于给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，矩阵的 NS 分裂不是唯一的，这里选取

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*) + \boldsymbol{S}_r, \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*) - \boldsymbol{S}_r, \quad \boldsymbol{S}_r = \mathrm{i}c\boldsymbol{I},$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，c 是一个实数.

为了有效求解线性方程组，我们采用增量未知元(IU)预处理和对称逐次超松弛(SSOR)预处理矩阵，分别从迭代矩阵的谱半径、迭代步数和迭代时间三方面对 NSS 方法和 PNSS 方法进行比较.

1. NSS 方法和 PNSS 方法迭代矩阵谱半径的比较

选取 $c=3$，$b=1$ 和 10，分别用 NSS 方法、NSS(IU)方法和 NSS(SSOR)方法进行计算. 由定理 4.1 可知，无论 NSS 方法还是 PNSS 方法，都有 $\eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}$，所以有 $\alpha=\sqrt{\gamma_{\min}^2+\eta_{\max}^2}$. 表 4.1 和表 4.2 分别给出了三种方法在 N 取不同值时参数 α 和谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$ 的比较.

表 4.1 $b=1$ 时，参数 α 和谱半径 $\rho(M(\alpha))$ 的比较

N	NSS		NSS(IU)		NSS(SSOR)	
	α	$\rho(M(\alpha))$	α	$\rho(M(\alpha))$	α	$\rho(M(\alpha))$
3	3.0475	0.9141	3.2208	0.8244	3.0606	0.8996
4	3.0154	0.9500	3.1370	0.8599	3.0397	0.9138
5	3.0064	0.9674	3.0740	0.9038	3.0255	0.9310
6	3.0031	0.9772	3.0403	0.9200	3.0166	0.9444

表 4.2 $b=10$ 时，参数 α 和谱半径 $\rho(M(\alpha))$ 的比较

N	NSS		NSS(IU)		NSS(SSOR)	
	α	$\rho(M(\alpha))$	α	$\rho(M(\alpha))$	α	$\rho(M(\alpha))$
3	3.0475	0.8810	3.2208	0.8066	3.0137	0.9214
4	3.0154	0.8972	3.1370	0.9463	3.0108	0.9333
5	3.0064	0.9292	3.0740	0.9141	3.0071	0.9418
6	3.0031	0.9498	3.0403	0.8726	3.0049	0.9444

2. NSS 方法和 PNSS 方法收敛速度的比较

选取 $c=3$，$b=1$ 和 $b=10$，分别用 NSS 方法、NSS(IU)方法和 NSS(SSOR)方法进行计算，定义

$$\text{时间比}=\frac{\text{NSS 方法所用时间}}{\text{PNSS 方法所用时间}}$$

从表 4.3 和表 4.4 中可以看出，随着网格数量的增加，时间比逐渐变大，PNSS 方法优势逐渐增强，无论是迭代步数，还是 CPU 时间，PNSS 方法都要优于 NSS 方法.

表 4.3 $b=1$ 时，迭代步数和迭代时间的比较

N	NSS		NSS(IU)			NSS(SSOR)		
	IT	CPU	IT	CPU	时间比	IT	CPU	时间比
3	105	0.5938	47	0.1875	0.1875	85	0.1803	3.30
4	179	1.9844	62	0.5313	0.5313	106	0.3705	5.34
5	274	6.6094	84	1.5625	1.5625	133	0.9313	7.10
6	389	14.188	113	4.0625	4.0625	166	2.7540	5.15

表 4.4 $b=10$ 时,迭代步数和迭代时间的比较

N	NSS		NSS(IU)			NSS(SSOR)		
	IT	CPU	IT	CPU	时间比	IT	CPU	时间比
3	62	0.5313	42	0.25	2.13	88	0.2904	1.83
4	94	1.1875	52	0.7812	1.52	104	0.4106	2.89
5	139	3.7344	60	1.5313	2.44	122	0.9514	3.93
6	195	5.2576	71	3.0781	1.71	142	2.5637	2.05

4.2.5 总结

本节研究了求解非埃尔米特正定线性方程组的预条件正规/反对称分裂(PNSS)方法,理论分析表明,对于任何给定的初值,PNSS 方法都收敛到原线性方程组的解. 除此之外,还推导出了迭代矩阵谱半径的上界以及当上界取得最小时参数 α 的计算方法. 在求解每个子线性方程组时,为了节省时间,文章给出了不精确的 PNSS(IPNSS)方法及其收敛定理. 在数值试验中,我们选取预处理矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 IU 和 SSOR,取得了较为满意的效果. 今后的工作可以考虑将 PNSS 方法用于求解系数矩阵为非埃尔米特半正定矩阵的线性方程组,例如求解鞍点问题,并进行相应的理论分析.

4.3 非埃尔米特正定线性系统的两参数预处理 NSS 迭代方法

4.3.1 两参数预处理 NSS 迭代方法的建立

在 NSS 迭代方法中,每迭代一步需要求解两个子线性方程组,并且这两个子线性方程组的系数矩阵 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{N}$ 和 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}$ 的性质各不相同,因此,从优化的角度来讲,我们可以采用不同的参数,即在 NSS 迭代格式中引入两个参数,分别记为 α 和 β,这样得到的迭代方法称为两参数 NSS(GNSS)迭代方法.

GNSS 迭代方法:给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$,对于 $k=0,1,2,\cdots$,直到 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛,计算

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\\(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\boldsymbol{b}\end{cases}\tag{4.15}$$

其中 $\alpha\geqslant0,\beta>0,\boldsymbol{N}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为正规矩阵,$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为反对称矩阵.

显然,GNSS 迭代方法是 NSS 迭代方法的推广,当 $\alpha=\beta$ 时,GNSS 方法退化为 NSS 迭代方法. 我们将 GNSS 迭代格式用于求解预条件线性方程组(4.2),就得到两参数预条件 NSS(GPNSS)迭代方法.

GPNSS 迭代方法:给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$,对于 $k=0,1,2,\cdots$,直到 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛,计算

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}=(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{b}\\(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\beta\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}+\boldsymbol{b}\end{cases}\tag{4.16}$$

其中 $\alpha\geqslant 0,\beta>0,\boldsymbol{N}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为正规矩阵，$\boldsymbol{S}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为反对称矩阵.

注 4.3　当预条件矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 时，GPNSS 退化为 GNSS 方法.

注 4.4　当预条件矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，参数 $\alpha=\beta$ 时，GPNSS 方法退化为 NSS 迭代方法.

下面，我们证明当两个参数满足一定的条件时，GPNSS 迭代方法是收敛的，并且 GPNSS 的收敛分析与 NSS 和 PNSS 方法的收敛分析是相容的；除此之外，我们给出了使得迭代矩阵的谱半径取得最小时参数 α 和 β 的计算方法；最后，我们选取 IU 和 ILU 分解做预处理，进行数值试验，数值结果证明了 GPNSS 方法在理论分析上的重要性和实际计算中的优越性.

4.3.2　两参数预处理 NSS 迭代方法收敛性分析

为了方便，我们将 GPNSS 迭代方法写成下面的等价格式：

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{N}(\alpha,\beta)\boldsymbol{b},\quad k=0,1,2,\cdots \tag{4.17}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)&=(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1}(\beta\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})\\ \boldsymbol{N}(\alpha,\beta)&=(\alpha+\beta)(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}\end{aligned} \tag{4.18}$$

这里，$\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)$ 为 GPNSS 迭代的迭代矩阵. 要证明 GPNSS 迭代格式是收敛的，只需证明迭代矩阵的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))<1$.

由于 $\boldsymbol{S}$ 为反对称矩阵，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{R}^*)^{-1}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{R}^{-1}((\boldsymbol{R}^*)^{-1}\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}^{-1})\boldsymbol{R}$，可知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$ 所有的特征值均为虚数，设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$ 的第 j 个特征值为 $\mathrm{i}e_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 下面给出 GPNSS 迭代的收敛性定理.

定理 4.3　令 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正定矩阵，$\mathbf{N}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正规矩阵，$\mathbf{S}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个反对称矩阵，并且满足 $\mathbf{A}=\mathbf{N}+\mathbf{S}$. $\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个埃尔米特正定矩阵. Θ_1 和 Θ_2 分别为 $\boldsymbol{P}^{-1}\mathbf{N}$ 和 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S}$ 特征值的集合. 对于 $\forall\lambda_k=\gamma_k+\mathrm{i}\eta_k\in\Theta_1$，$k=1,2,\cdots,n$，$\gamma_k$ 表示特征值的实部，η_k 表示特征值的虚部，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，引入下面的记号：

$$\gamma_{\max}=\max_{k=1,\cdots,n}\{\gamma_k\},\quad \gamma_{\min}=\min_{k=1,\cdots,n}\{\gamma_k\}$$

$$\eta_{\max}=\max_{k=1,\cdots,n}\{|\eta_k|\},\quad \eta_{\min}=\min_{k=1,\cdots,n}\{|\eta_k|\}$$

对于 Θ_2 中的特征值，引入下面的记号：

$$e_{\max}=\max_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\{|e_j|\},\quad e_{\min}=\min_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\{|e_j|\}$$

那么，我们有 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))<\sigma(\alpha,\beta)$，其中，

$$\sigma(\alpha,\beta)=\max_{\gamma_k+\mathrm{i}\eta_k\in\Theta_1}\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_k)^2+\eta_k^2}{(\alpha+\gamma_k)^2+\eta_k^2}}\cdot\max_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\sqrt{\frac{\alpha^2+e_j^2}{\beta^2+e_j^2}}$$

如果参数 α 和 β 满足下面两个条件之一：

(1) 当 $\eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$，　$(\alpha,\beta)\in\bigcup_{i=1}^{4}\Omega_i$，其中

$$\Omega_1=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\leqslant\beta<\beta(\alpha)\},\quad \Omega_2=\{(\alpha,\beta)\mid\beta<\min\{\alpha,\beta(\alpha)\},\quad \Psi_1(\alpha,\beta)<0\},$$

$$\Omega_3=\{(\alpha,\beta)\mid\beta(\alpha)\leqslant\beta\leqslant\alpha,\quad \Psi_2(\alpha,\beta)<0\},\quad \Omega_4=\{(\alpha,\beta)\mid\beta\geqslant\max\{\alpha,\beta(\alpha)\}\},$$

函数 $\Psi_1(\alpha,\beta),\Psi_2(\alpha,\beta)$ 和 $\beta(\alpha)$定义如下：

$$\Psi_1(\alpha,\beta)=(\gamma_{\max}^2-e_{\min}^2)(\alpha-\beta)-2\alpha\beta\gamma_{\max}-2e_{\min}^2\gamma_{\max}+(\alpha-\beta)\eta_{\max}^2 \tag{4.19}$$

$$\Psi_2(\alpha,\beta)=(\gamma_{\min}^2-e_{\min}^2)(\alpha-\beta)-2\alpha\beta\gamma_{\min}-2e_{\min}^2\gamma_{\min}+(\alpha-\beta)\eta_{\max}^2 \tag{4.20}$$

$$\beta(\alpha)=\frac{2\gamma_{\min}\gamma_{\max}+\alpha(\gamma_{\min}+\gamma_{\max})-2\eta_{\max}^2}{2\alpha+\gamma_{\max}+\gamma_{\min}} \tag{4.21}$$

(2) 当 $\eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$，$(\alpha,\beta)\in\bigcup_{i=1}^{3}\Pi_i$，其中

$$\Pi_1=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\leqslant\beta\},\Pi_2=\{(\alpha,\beta)\mid\beta(\alpha)\leqslant\beta<\alpha,\quad\Psi_2(\alpha,\beta)<0\},$$

$$\Pi_3=\{(\alpha,\beta)\mid\beta<\min\{\alpha,\beta(\alpha)\},\Psi_1(\alpha,\beta)<0\},$$

函数 $\Psi_1(\alpha,\beta),\Psi_2(\alpha,\beta)$ 和 $\beta(\alpha)$定义如式(4.19)～式(4.21).

则我们有下面的不等式成立

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))\leqslant\sigma(\alpha,\beta)<1,$$

即 GPNSS 迭代方法收敛到线性系统(4.1)的精确解 $\boldsymbol{x}^*$.

证明：利用相似矩阵的性质以及谱范数的性质，我们有

$$\begin{aligned}
&\rho((\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{M}(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1})\\
&=\rho((\beta\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})^{-1})\\
&=\rho((\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})^{-1})\\
&\leqslant\|(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{N})^{-1}\|_2\cdot\|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{S})(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-1}S)^{-1}\|_2\\
&=\max_{\lambda_k\in\Theta_1}\left|\frac{\beta-\lambda_k}{\alpha+\lambda_k}\right|\cdot\max_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\left|\sqrt{\frac{\alpha^2+e_j^2}{\beta^2+e_j^2}}\right|\\
&=\max_{\gamma_k+\mathrm{i}\eta_k\in\Theta_1}\sqrt{\frac{(\beta-\lambda_k)^2+\eta^{\eta_k^2}}{(\alpha+\gamma_k)^2+\eta_k^2}}\cdot\max_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\left|\sqrt{\frac{\alpha^2+e_j^2}{\beta^2+e_j^2}}\right|
\end{aligned}$$

因为 $\alpha-\beta+2\gamma>0$，易验证 $\sqrt{((\beta-\gamma)^2+\eta^2)/((\alpha+\gamma)^2+\eta^2)}$ 关于变量 η 递增，因此，有

$$\begin{aligned}
\max_{\gamma_k+\mathrm{i}\eta_k\in\Theta_1}\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_k)^2+\eta_k^2}{(\alpha+\gamma_k)^2+\eta_k^2}}&=\max_{\gamma_{\min}\leqslant\gamma_k\leqslant\gamma_{\max}}\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_k)^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_k)^2+\eta_{\max}^2}}\\
&=\max\left\{\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}},\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

类似的，我们有下列不等式

$$\max_{\mathrm{i}e_j\in\Theta_2}\sqrt{\frac{\alpha^2+e_j^2}{\beta^2+e_j^2}}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}, & \alpha\leqslant\beta\\[2ex]\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & \alpha>\beta\end{cases} \tag{4.23}$$

下面，我们分两种情况讨论.

(1) $\eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\min}\gamma_{\max}}$

利用函数 $\beta(\alpha)$的定义，式(4.22)的右端可化为

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}, & \beta<\beta(\alpha)\\ \sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}, & \beta\geqslant\beta(\alpha)\end{cases} \tag{4.24}$$

下面我们把区域

$$D=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\},\quad D=\bigcup_{i=1}^{4}D_i$$

分成四个部分(如图 4.1 所示，$\alpha_0=\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}-\eta_{\max}^2}$)，分别记作

$$D_1=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\leqslant\beta<\beta(\alpha)\},\quad D_2=\{(\alpha,\beta)\mid\beta<\min\{\alpha,\beta(\alpha)\}\}$$

$$D_3=\{(\alpha,\beta)\mid\beta(\alpha)\leqslant\beta<\alpha\},\quad D_4=\{(\alpha,\beta)\mid\beta\geqslant\max\{\alpha,\beta(\alpha)\}\}$$

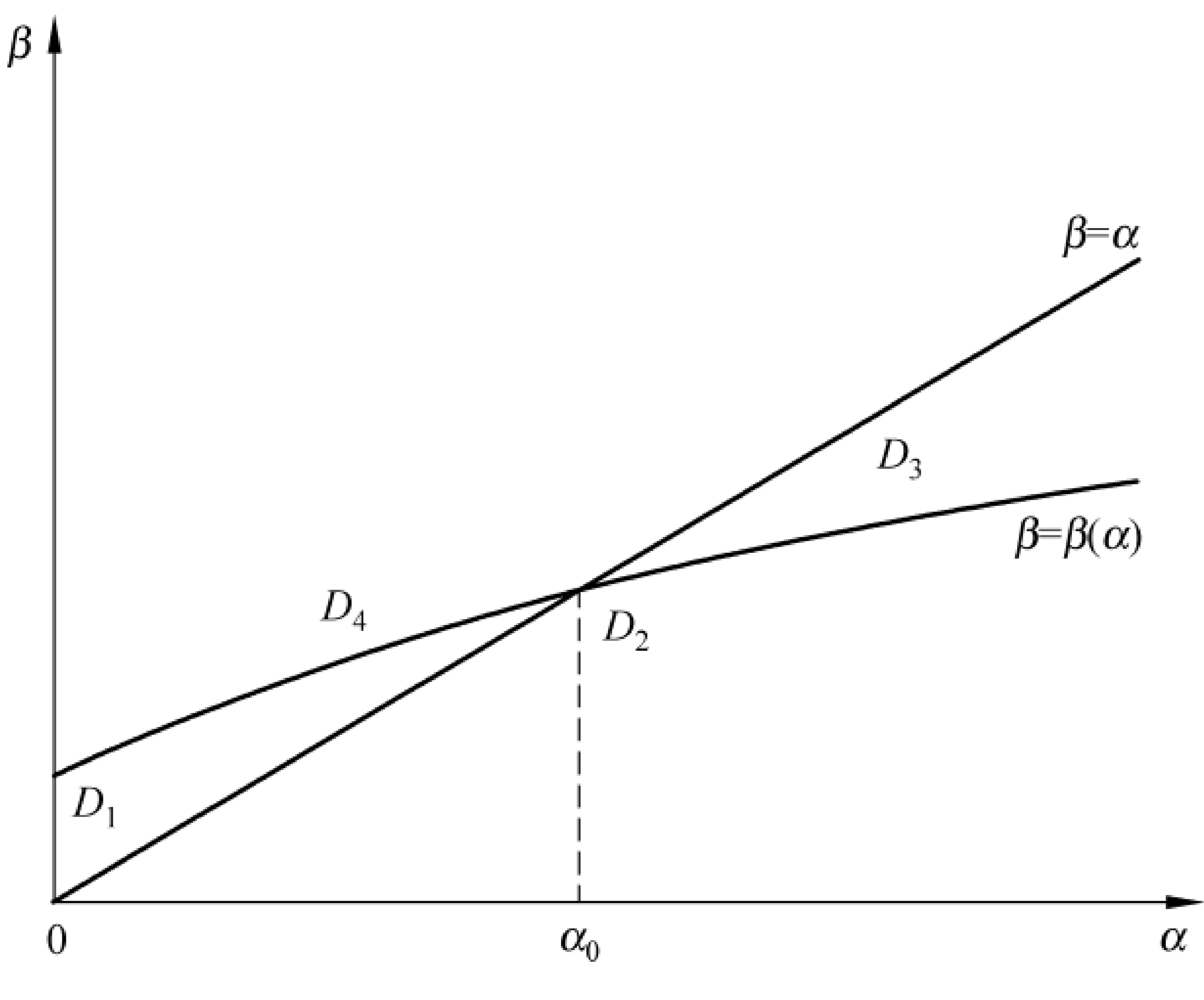


图 4.1　D 的四个子区域

(a) 当$(\alpha,\beta)\in D_1$ 时，由式(4.22)、式(4.23)和式(4.24)，我们有

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))<\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}<1$$

(b) 当$(\alpha,\beta)\in D_2$ 时，谱半径满足

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))<\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}$$

上述不等式严格小于 1 当且仅当

$$\Psi_1(\alpha,\beta)=(\gamma_{\max}^2-e_{\min}^2)(\alpha-\beta)-2\alpha\beta\gamma_{\max}-2e_{\min}^2\gamma_{\max}+(\alpha-\beta)\eta_{\max}^2<0$$

(c) 当$(\alpha,\beta)\in D_3$时，谱半径满足

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))<\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}<1$$

当且仅当

$$\Psi_2(\alpha,\beta)=(\gamma_{\max}^2-e_{\min}^2)(\alpha-\beta)-2\alpha\beta\gamma_{\max}-2e_{\min}^2\gamma_{\max}+(\alpha-\beta)\eta_{\max}^2<0$$

(d) 当$(\alpha,\beta)\in D_4$时，我们有

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)) < \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}} < 1$$

自然成立.

因此，当 $\eta_{\max} < \sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$ 时，有

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)) < 1, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_i$$

(2) $\eta_{\max} \geqslant \sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$

利用函数 $\beta(\alpha)$ 的定义，式(4.22)的右端可化为

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}, & \alpha \leqslant \beta \\ \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & \alpha > \beta \geqslant \beta(\alpha) \\ \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & \beta < \min\{\alpha,\beta(\alpha)\} \end{cases} \tag{4.25}$$

很自然的，我们把区域 $D=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\}$ 分成三个部分，分别记为 $D=\bigcup_{i=1}^{3} D_i^*$，$i=1,2,3$. 其中

$$D_1^* = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \leqslant \beta\}, \quad D_2^* = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha > \beta \geqslant \beta(\alpha)\},$$
$$D_3^* = \{(\alpha,\beta) \mid \beta < \min\{\alpha,\beta(\alpha)\}\},$$

(a) 当 $(\alpha,\beta)\in D_1^*$ 时，由式(4.22)、式(4.23)和式(4.25)，我们有

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)) < \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}} < 1$$

(b) 当 $(\alpha,\beta)\in D_2^*$ 时，谱半径满足

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)) < \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}$$

不等式严格小于 1 当且仅当 $\Psi_2(\alpha,\beta)<0$.

(c) 当 $(\alpha,\beta)\in D_3^*$ 时，谱半径满足

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)) < \sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}} < 1$$

当且仅当 $\Psi_1(\alpha,\beta)<0$.

因此，当 $\eta_{\max} \geqslant \sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$ 时，我们有

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)) < 1, \quad \forall (\alpha,\beta) \in \bigcup_{i=1}^{3} \Pi_i$$

4.3.3 最优化策略

下面我们引入记号

$$(\alpha^*,\beta^*) = \arg\min_{\alpha,\beta}\{\sigma(\alpha,\beta)\}$$

定理 4.4 给出使得 GPNSS 迭代矩阵谱半径的上界取得最小时参数 (α^*,β^*) 的计算

方法.

定理 4.4　若 $\eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$，$\Psi_3(\alpha,\beta)>0$，$\Psi_4(\alpha,\beta)>0$，那么使得 GPNSS 迭代矩阵谱半径 $\rho(M(\alpha,\beta))$ 的上界取得最小时参数 (α,β) 值为

$$(\alpha^*,\beta^*)=\begin{cases}(\alpha_1,\beta(\alpha_1)), & \Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\leqslant e_{\min}^2\\(\alpha_0,\beta(\alpha_0)), & e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2\\(\alpha_2,\beta(\alpha_2)), & \Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2\end{cases}$$

其中，

$$\begin{cases}\Psi_3(\alpha,\beta)=-e_{\min}^2\Upsilon_{\min}-\beta\eta_{\max}^2+\beta^2\Upsilon_{\min}-\beta\Upsilon_{\min}^2+\beta e_{\min}^2\\\Psi_4(\alpha,\beta)=-e_{\max}^2\Upsilon_{\min}-\beta\eta_{\max}^2+\beta^2\Upsilon_{\min}-\beta\Upsilon_{\max}^2+\beta e_{\min}^2\\\alpha_1=\dfrac{\eta_{\max}^2+e_{\min}^2-\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}+\Delta_1}{\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max}}\\\alpha_2=\dfrac{\eta_{\max}^2+e_{\max}^2-\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}+\Delta_2}{\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max}}\\\Delta_1=\sqrt{(e_{\min}^2+\Upsilon_{\min}^2)(e_{\min}^2+\Upsilon_{\max}^2)+\eta_{\max}^2(\eta_{\max}^2+2e_{\min}^2-2\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max})}\\\Delta_2=\sqrt{(e_{\max}^2+\Upsilon_{\min}^2)(e_{\max}^2+\Upsilon_{\max}^2)+\eta_{\max}^2(\eta_{\max}^2+2e_{\max}^2-2\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max})}\end{cases}$$

除此之外，利用不等式(4.23)、(4.24)，我们有

$$\sigma(\alpha^*,\beta^*)=\begin{cases}\sigma(\alpha_1), & \Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\leqslant e_{\min}^2\\\sigma(\alpha_0), & e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2\\\sigma(\alpha_2), & \Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2\end{cases}$$

其中，$\sigma(\alpha)$ 由式(4.27)定义.

证明：利用不等式(4.23)和不等式(4.24)，有

$$\sigma(\alpha,\beta)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_1\\\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_2\\\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_3\\\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_4\end{cases}\tag{4.26}$$

通过计算，我们发现当 $(\alpha,\beta)\in D_1\cup D_2$ 时，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$ 关于 β 的偏导数 $\sigma_\beta(\alpha,\beta)<0$ 利用定理 4.3 的条件 $\Psi_3(\alpha,\beta)>0$，$\Psi_4(\alpha,\beta)>0$，我们有当 $(\alpha,\beta)\in D_3\cup D_4$ 时，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$ 关于 β 的偏导数 $\sigma_\beta(\alpha,\beta)>0$，因此，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$ 的最小值应该在区域 $D_1\cup D_2$ 和 $D_3\cup D_4$ 的交线 $\beta=\beta(\alpha)$ 上取得. 为了找到函数函数 $\sigma(\alpha,\beta)$ 的最小值，只须找到函数

$$\sigma(\alpha)\overset{\text{def}}{=\!=}\sigma(\alpha,\beta(\alpha))=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(\beta(\alpha)-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta(\alpha)^2+e_{\min}^2}}, & \alpha>\alpha_0,\\\sqrt{\dfrac{(\beta(\alpha)-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta(\alpha)^2+e_{\max}^2}}, & \alpha\leqslant\alpha_0.\end{cases}\tag{4.27}$$

的最小值．利用求导数公式，可以得到

$$\sigma'(\alpha)=\begin{cases}c_1(\alpha)\eta_1(\alpha), & \alpha>\alpha_0\\ c_2(\alpha)\eta_2(\alpha), & \alpha\leqslant\alpha_0\end{cases}$$

其中，$c_1(\alpha)>0$，$c_2(\alpha)>0$ 分别为两个正函数，并且

$$\begin{cases}\eta_1(\alpha)=(\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max})\alpha^2+2(\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}-e_{\min}^2-\eta_{\max}^2)\alpha-e_{\min}^2(\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max})\\ \eta_2(\alpha)=(\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max})\alpha^2+2(\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}-e_{\max}^2-\eta_{\max}^2)\alpha-e_{\max}^2(\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max})\end{cases}$$

注意到，$\eta_1(\alpha)$ 和 $\eta_2(\alpha)$的均为一正一负．记这两个函数的正根分别为 α_1，α_2．由

$$\begin{cases}\eta_1(\alpha_0)=(\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max}+2\sqrt{\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}})(\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}-\eta_{\max}^2-e_{\min}^2)\\ \eta_2(\alpha_0)=(\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max}+2\sqrt{\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}})(\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}-\eta_{\max}^2-e_{\max}^2)\end{cases}$$

我们有下面的结果成立：

① 如果 $\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\leqslant e_{\min}^2$，那么 $\sigma(\alpha,\beta)$的最小值是 $\sigma(\alpha_1)$，即 $\sigma(\alpha_1,\beta(\alpha_1))$，$\alpha_1>\alpha_0$．

② 如果 $e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2$，那么 $\sigma(\alpha,\beta)$的最小值是 $\sigma(\alpha_0)$，即 $\sigma(\alpha_0,\beta(\alpha_0))$．

③ 如果 $\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2$，那么 $\sigma(\alpha,\beta)$ 的最小值是 $\sigma(\alpha_2)$，即 $\sigma(\alpha_2,\beta(\alpha_2))$，$\alpha_2<\alpha_0$．

定理 4.5 若 $\eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$，使得 GPNSS 迭代矩阵谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$ 的上界取得最小时参数(α,β)值为

$$(\alpha^*,\beta^*)=\begin{cases}(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2), & \Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\min}^2\\ (\mu_0,\mu_0), & e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2\\ (\bar{\alpha}_1,\bar{\beta}_1), & \Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2\end{cases}$$

其中，

$$\begin{cases}\bar{\alpha}_1=\dfrac{-(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2)+e_{\max}^2+\sqrt{((\eta_{\max}+e_{\max})^2+\Upsilon_{\min}^2)((\eta_{\max}-e_{\max})^2+\Upsilon_{\min}^2)}}{2\Upsilon_{\min}}\\ \bar{\alpha}_2=\dfrac{-(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\min}^2)+e_{\min}^2+\sqrt{((\eta_{\max}+e_{\min})^2+\Upsilon_{\min}^2)((\eta_{\max}-e_{\min})^2+\Upsilon_{\min}^2)}}{2\Upsilon_{\min}}\\ \bar{\beta}_1=\dfrac{(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2)-e_{\max}^2+\sqrt{((\eta_{\max}+e_{\max})^2+\Upsilon_{\min}^2)((\eta_{\max}-e_{\max})^2+\Upsilon_{\min}^2)}}{2\Upsilon_{\min}}\\ \bar{\beta}_1=\dfrac{(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2)+e_{\min}^2+\sqrt{((\eta_{\max}+e_{\min})^2+\Upsilon_{\min}^2)((\eta_{\max}-e_{\min})^2+\Upsilon_{\min}^2)}}{2\Upsilon_{\min}}\end{cases}$$

相应地，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$的最小值为

$$\sigma(\alpha^*,\beta^*)=\begin{cases}\sigma(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2), & \Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\min}^2\\ \sigma(\mu_0,\mu_0), & e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2\\ \sigma(\bar{\alpha}_1,\bar{\beta}_1), & \Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2\end{cases}$$

其中 $\mu_0=\sqrt{\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2}$．

证明：由式(4.25)，有

$$
\sigma(\alpha,\beta)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_1^*\\ \sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_2^*\\ \sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\max})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_3^*\end{cases}
$$

显然，当$(\alpha,\beta)\in D_3^*$时，函数$\sigma(\alpha,\beta)$关于β的偏导数$\sigma_\beta(\alpha,\beta)<0$，因此求上式的最小值等价于求下列方程的最小值：

$$
\sigma(\alpha,\beta)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_1^*\\ \sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}}, & (\alpha,\beta)\in D_2^*\end{cases}
$$

为了求出最小值，我们首先计算函数$\sigma(\alpha,\beta)$的两个偏导数$\sigma_\alpha(\alpha,\beta)$，$\sigma_\beta(\alpha,\beta)$，事实上，

$$
\sigma_\alpha(\alpha,\beta)=\begin{cases}\bar{c}_1(\alpha,\beta)\bar{\eta}_1(\alpha),(\alpha,\beta)\in D_1^*\\ \bar{c}_2(\alpha,\beta)\bar{\eta}_2(\alpha),(\alpha,\beta)\in D_2^*\end{cases}
$$

其中，$\bar{c}_1(\alpha,\beta)$，$\bar{c}_2(\alpha,\beta)$分别为两个正函数，并且$\bar{\eta}_1$，$\bar{\eta}_2$为关于α的两个函数，

$$
\begin{cases}\bar{\eta}_1(\alpha)=\Upsilon_{\min}\alpha^2+(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2-e_{\max}^2)\alpha-\Upsilon_{\min}e_{\max}^2\\ \bar{\eta}_2(\alpha)=\Upsilon_{\min}\alpha^2+(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2-e_{\min}^2)\alpha-\Upsilon_{\min}e_{\min}^2\end{cases}
$$

类似地，有

$$
\sigma_\beta(\alpha,\beta)=\begin{cases}\bar{c}_3(\alpha,\beta)\bar{\eta}_3(\beta),(\alpha,\beta)\in D_1^*\\ \bar{c}_4(\alpha,\beta)\bar{\eta}_4(\beta),(\alpha,\beta)\in D_2^*\end{cases}
$$

其中，$\bar{c}_3(\alpha,\beta)$，$\bar{c}_4(\alpha,\beta)$分别为两个正函数，并且$\bar{\eta}_3$，$\bar{\eta}_4$为关于β的两个函数，

$$
\begin{cases}\bar{\eta}_3(\beta)=\Upsilon_{\min}\beta^2+(e_{\max}^2-(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2))\beta-\Upsilon_{\min}e_{\max}^2\\ \bar{\eta}_4(\beta)=\Upsilon_{\min}\beta^2+(e_{\min}^2-(\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2))\beta-\Upsilon_{\min}e_{\min}^2\end{cases}
$$

注意到$\bar{\eta}_1(\alpha)$，$\bar{\eta}_2(\alpha)$，$\bar{\eta}_3(\beta)$，$\bar{\eta}_4(\beta)$都各有一个正根和负根. 我们把上面 4 个函数的正根分别记作$\bar{\alpha}_1$，$\bar{\alpha}_2$，$\bar{\beta}_1$，$\bar{\beta}_2$，我们有下面的结果：

(a) 如果$\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\min}^2$，我们有$\bar{\alpha}_1>\bar{\beta}_1$，$\bar{\alpha}_2>\bar{\beta}_2$，因此，函数$\sigma(\alpha,\beta)$在区域$D_1^*$内取不到最小值，而在区域$\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>\beta\}$，函数$\sigma(\alpha,\beta)$在点$(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2)$处可以取到最小值. 事实上，$\sigma(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2)$是函数$\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}$在区域$\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\}$内的最小值，因此

$$
\begin{aligned}\sigma(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2)&\leqslant\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}},\\ &\leqslant\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}},\quad\alpha\leqslant\beta\end{aligned}
$$

最后，我们要说明的是，由于$\bar{\beta}_2>\beta(\bar{\alpha}_2)$点$(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2)$在区域$D_2^*$内，因此，当$\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant$

$e_{\min}^2$时，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$在区域$\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\}$内的最小值是 $\sigma(\bar{\alpha}_2,\bar{\beta}_2)$.

(b) 如果 $e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2$，那么 $\bar{\alpha}_1>\bar{\beta}_1$，$\bar{\alpha}_2>\bar{\beta}_2$，容易看出点$(\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i)$不在 D_i^*，$i=1,2$ 内，因此，最小值只能在直线 $\alpha=\beta$ 上取得最小值，即最小值是使得 $\sigma(\alpha,\alpha)$导数为零的点，记为 μ_0，最后，可以计算出 $\mu_0=\sqrt{\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2}$，函数在$\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\}$ 内的最小值为 $\sigma(\mu_0,\mu_0)$.

(c) 如果 $\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2$，我们有 $\bar{\alpha}_1<\bar{\beta}_1$，$\bar{\alpha}_2<\bar{\beta}_2$，因此，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$在区域 D_2^* 内取不到最小值，而在区域 D_1^*，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$ 在点$(\bar{\alpha}_1,\bar{\beta}_1)$处可以取到最小值. 事实上，$\sigma(\bar{\alpha}_1,\bar{\beta}_1)$是函数$\sqrt{\dfrac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}}$ 在区域$\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\}$内的最小值，因此

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{\alpha}_1,\bar{\beta}_1)&\leqslant\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\max}^2}{\beta^2+e_{\max}^2}},\\&\leqslant\sqrt{\frac{(\beta-\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}{(\alpha+\gamma_{\min})^2+\eta_{\max}^2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^2+e_{\min}^2}{\beta^2+e_{\min}^2}},\quad\alpha>\beta\end{aligned}$$

因此，当 $\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2$ 时，函数 $\sigma(\alpha,\beta)$ 在在区域$\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>0\}$ 内的最小值是 $\sigma(\bar{\alpha}_1,\bar{\beta}_1)$.

4.3.4　不精确两参数预处理 NSS 迭代策略

为了提高两参数预处理 NSS 迭代方法的效率，我们可以利用迭代方法对两个子线性代数方程组近似求解，于是得到下面的不精确两参数预处理 NSS 迭代方法.

不精确的两参数预处理 NSS(GPNSS)迭代方法：给定一个初值 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到$\{\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}$收敛，以 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ 为初值，利用某种迭代方法(例如 CG 方法)近似计算$(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}\approx(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}+\boldsymbol{b}$ 的解，得到 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}$；然后以 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}$ 为初值，利用某种迭代方法(比如 Krylov 子空间方法)近似计算$(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}\approx(\beta\boldsymbol{P}-\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}$ 的解，得到 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}$.

为了简化数值计算和收敛性分析，将 GPNSS 迭代格式写成如下等价形式：

给定一个初值 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到$\{\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}\}$收敛.

① 近似求解线性方程组$(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k)}\approx\bar{\boldsymbol{r}}^{(k)}$ $(\bar{\boldsymbol{r}}^{(k)}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)})$直到残量 $\bar{\boldsymbol{p}}^{(k)}=\bar{\boldsymbol{r}}^{(k)}-(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k)}$，满足

$$\|\bar{\boldsymbol{p}}^{(k)}\|\leqslant\varepsilon_k\|\bar{\boldsymbol{r}}^{(k)}\|,$$

然后计算 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}=\bar{\boldsymbol{x}}^{(k)}+\bar{\boldsymbol{z}}^{(k)}$.

② 近似求解线性方程组$(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k+\frac{1}{2})}\approx\bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})}$ $(\bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})})$直到残量 $\bar{\boldsymbol{q}}^{(k+\frac{1}{2})}=\bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})}-(\beta\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S})\bar{\boldsymbol{z}}^{(k+\frac{1}{2})}$，满足 $\|\bar{\boldsymbol{q}}^{(k+\frac{1}{2})}\|\leqslant\eta_k\|\bar{\boldsymbol{r}}^{(k+\frac{1}{2})}\|$，然后计算 $\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}=\bar{\boldsymbol{x}}^{(k+\frac{1}{2})}+\bar{\boldsymbol{z}}^{(k+\frac{1}{2})}$. 这里，$\|\cdot\|$ 为向量范数.

利用矩阵分裂

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1\equiv(\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{N})-(\alpha\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S})$$

$$=M_2 - N_2 \equiv (\beta P + S) - (\beta P - N),$$

引入下面的范数：

$$|||x|||_M = \|Mx\|, \quad 对于所有的 x \in \mathbf{C}^n$$

其诱导范数为

$$|||X|||_M = \|MXM^{-1}\|, \quad 对于所有的 X \in \mathbf{C}^{n\times n}$$

这时，若令 $M=\beta P+S$，我们有下面的收敛性定理：

定理 4.6 令 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正定矩阵，$N\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个正规矩阵，$S\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个反对称矩阵，并且满足 $A=N+S$. $P\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 是一个埃尔米特正定矩阵. $x^*\in\mathbf{C}^n$ 为线性方程组(4.1)的解. $\{\bar{x}^{(k)}\}$ 为 GPNSS 方法得到的迭代序列，则有下式成立：

$$|||\bar{x}^{(k+1)} - x^*||| \leqslant (\sigma(\alpha,\beta) + \theta\rho\eta_k)(1 + \theta\varepsilon_k)\,|||\bar{x}^{(k)} - x^*|||, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

其中 $|||x|||$ 代表 $|||x|||_M$，$\rho=\|(\beta P+S)(\alpha P+N)^{-1}\|_2$，$\theta=\|A(\beta P+S)^{-1}\|_2$.

特别地，如果 $(\sigma(\alpha,\beta)+\theta\rho\eta_{\max})(1+\theta\varepsilon_{\max})<1$，那么迭代序列 $\{\bar{x}^{(k)}\}$ 收敛到线性方程组(1)的解 $x^*\in\mathbf{C}^n$，这里，$\varepsilon_{\max}=\max\limits_k\{\varepsilon_k\}$，$\eta_{\max}=\max\limits_k\{\eta_k\}$.

4.3.5 数值算例

例 4.2 求解下面的反应扩散方程

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})+bu_x = f, & (x,y)\in\Omega \\ u=0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

其中 $b>0$ 是一个常数，$\Omega=(0,1)^2$. 使用网格步长为为 h 的五点离散格式

$$\frac{1}{h^2}(4u_{ij}-u_{i-1,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j-1}-u_{i,j+1})+\frac{b}{2h}(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}) = f_{ij},$$

这里 u_{ij} 和 f_{ij} 分别表示 u 和 f 的近似值，得到下面的线性方程组

$$AU = f$$

和矩阵的 HS 分裂不同，对于给定的矩阵 A，矩阵的 NS 分裂不是唯一的，这里选取

$$N = \frac{1}{2}(A+A^*)+S_r, \quad S = \frac{1}{2}(A-A^*)-S_r, \quad S_r = \mathrm{i}cI,$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，c 是一个实数.

在计算中，选用 IU 预处理和 ILU 分解预处理，用 4 种迭代方法计算，这 4 种迭代方法分别是 NSS 迭代、GNSS 迭代、GPNSS(IU)和 GPNSS(ILU). 比较迭代矩阵的谱半径和收敛速度，结果如下.

1. 谱半径和收敛域

我们首先考察 GPNSS 方法的谱半径和收敛域. 为了有效地证明理论的正确性，数值实验分两步进行：

① 取 $c=1$，$b=1$，可以验证，在 NSS 迭代、GNSS 迭代和 GPNSS(IU)三种方法中 $\eta_{\max}<\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$，$\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2$，而在 GPNSS(ILU)方法中，$\eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}\,\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}-\eta_{\max}^2\geqslant e_{\max}^2$，利用定理 4.3，我们可以算出 GPNSS(IU)的收敛域(见图 4.2)

$$C=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>\beta_1(\alpha)\}=\bigcup_{i=1}^{4}\Omega_i$$

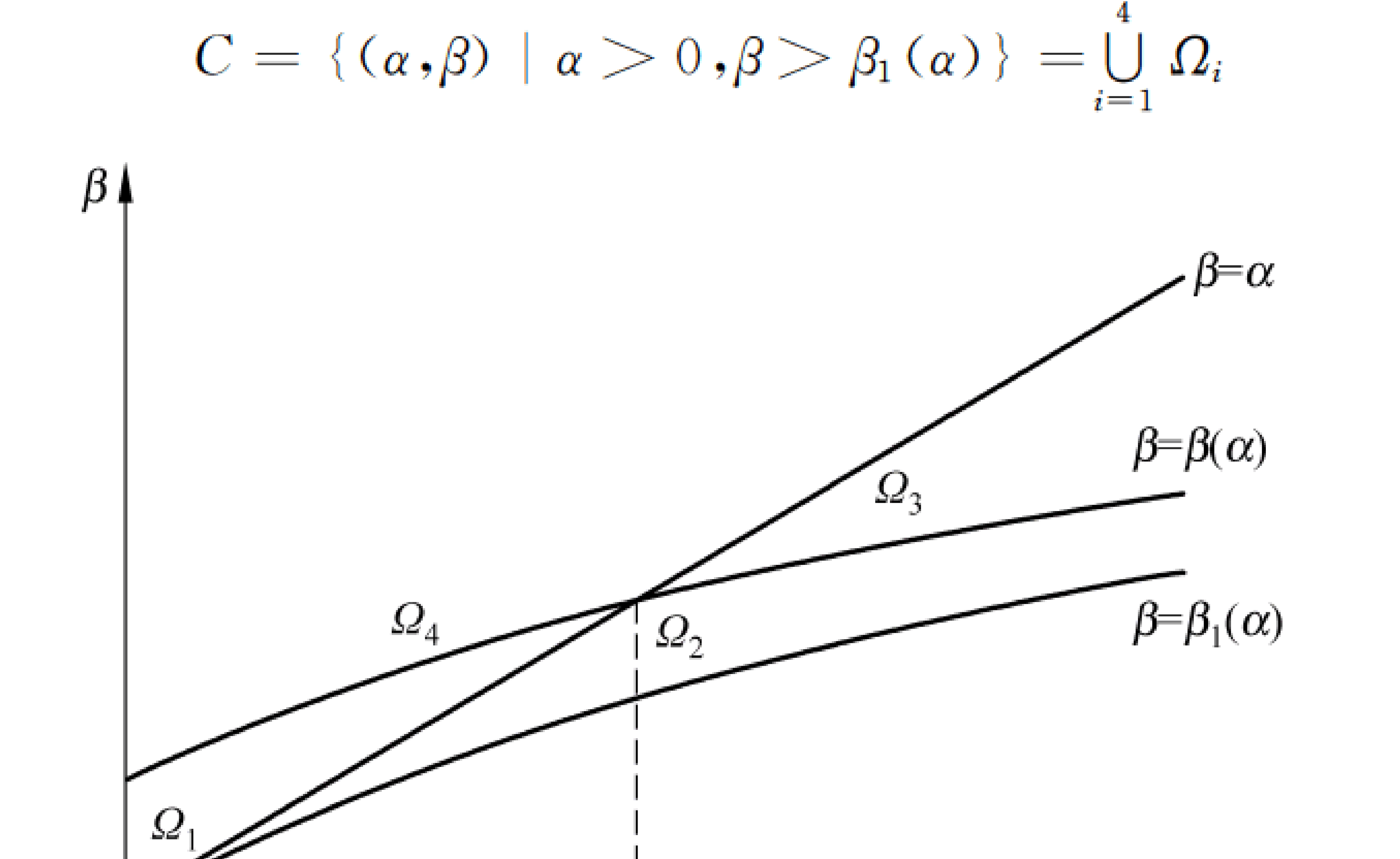


图 4.2 GPNSS(IU)方法的收敛域

其中，$\beta_1(\alpha)=\dfrac{45.71\alpha-1.55}{13.47\alpha+45.71}$. 根据定理 4.5 可以计算出参数$(\alpha,\beta)$的值为$(\alpha_2,\beta(\alpha_2))$. 谱半径的比较结果见表 4.5，$n_0$代表 IU 离散的粗网格数. 数据表明，GPNSS(IU)迭代矩阵的谱半径要远小于其他三种迭代方法.

表 4.5 $b=1$ 时，NSS 方法和 GNSS 方法收敛半径的比较

n_0		3	4	5	6
NSS	α	1.7321	1.1589	0.7265	0.2680
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$	0.8045	0.8620	0.9077	0.9596
GNSS	α	0.6180	0.8172	0.9421	1.0213
	β	1.1849	0.9574	0.8692	0.8278
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.7687	0.8520	0.9058	0.9336
GPNSS(ILU)	α	0.9042	1.0168	0.9306	1.2488
	β	1.2272	1.0963	1.1969	0.8905
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.7609	0.8283	0.8727	0.9077
GPNSS(IU)	α	0.5911	0.3595	0.4799	0.6063
	β	2.0320	1.5571	1.2626	1.0700
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.5678	0.6562	0.7275	0.7855

② 取 $c=3,b=10$，可以验证，在四种方法中均有 $\eta_{\max}\geqslant\sqrt{\gamma_{\max}\gamma_{\min}}$，$e_{\min}^2<\Upsilon_{\min}^2+\eta_{\max}^2\leqslant e_{\max}^2$，利用定理 4.3，我们可以算出 GPNSS(IU)的收敛域(见图 4.3)

$$C=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha>0,\beta>\beta_2(\alpha)\}=\bigcup_{i=1}^{3}\Pi_i$$

其中，$\beta_2(\alpha)=\dfrac{8.13\alpha-1.10}{0.99\alpha+8.13}$. 注意，集合 Π_3 是空集. 根据定理 4.5，可以计算出参数(α,β)

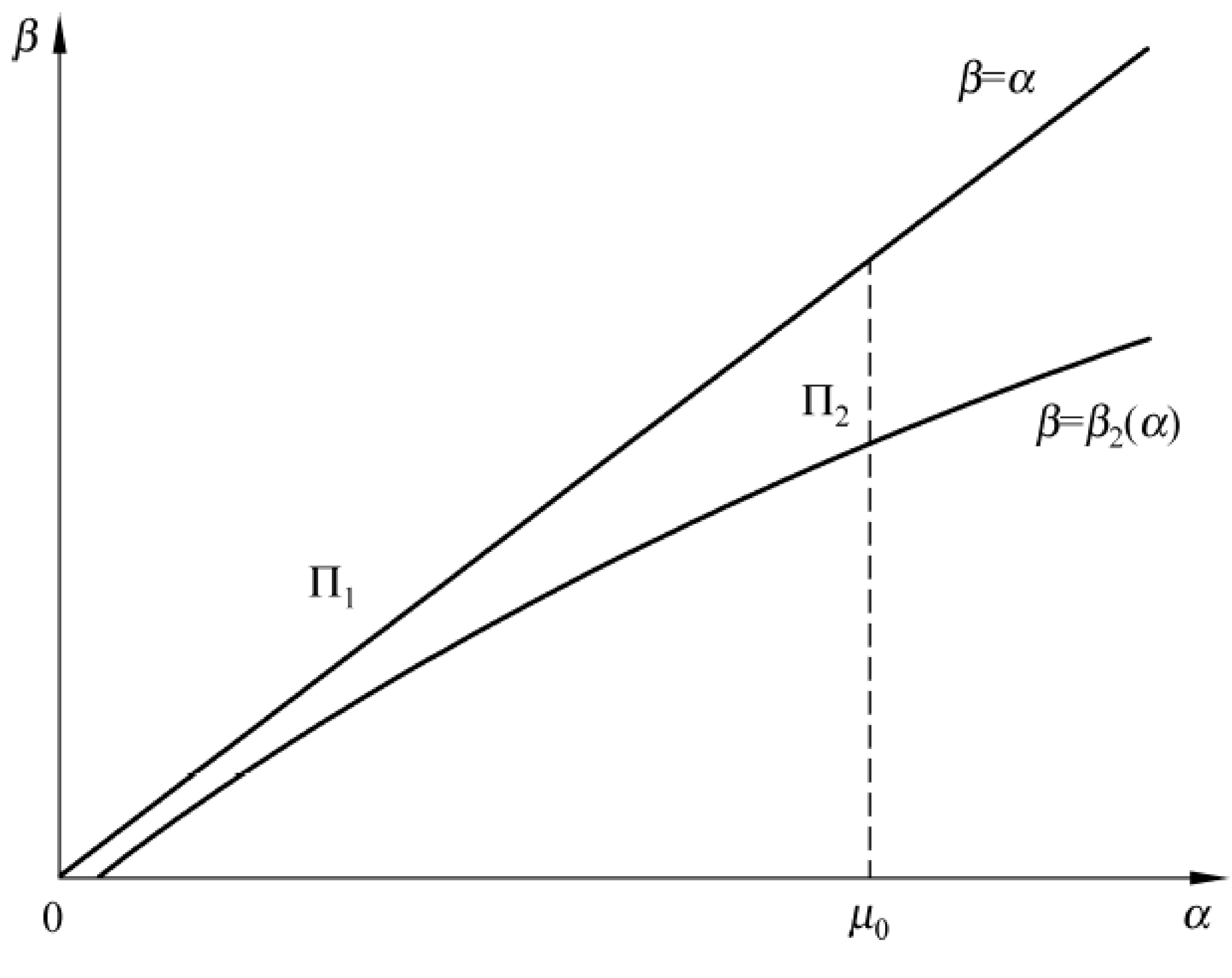


图 4.3　GPNSS(IU)方法的收敛域

的值为(μ_0, μ_0)，谱半径的比较结果见表 4.6. 注意到，此种情况下，GNSS 方法即为 NSS 方法.

表 4.6　$b=10$ 时，NSS 方法和 GNSS 方法谱半径的比较

n_0		3	4	5	6
NSS(GNSS)	α	3.0473	3.0154	3.0064	3.0031
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$	0.810	0.8972	0.9292	0.9498
GPNSS(ILU)	α	3.0697	3.0352	3.0178	3.0094
	β	3.0697	3.0352	3.0178	3.0094
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.8877	0.9101	0.9271	0.9401
GPNSS(IU)	α	3.2280	3.1370	3.0740	3.0403
	β	3.2280	3.1370	3.0740	3.0403
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.7934	0.7927	0.9141	0.8726

2. 收敛速度的比较

本节主要比较 4 种迭代方法的收敛速度，表 4.7 和表 4.8 分别给出在 $b=1$ 和 $b=10$ 时的迭代步数(IT)和 CPU 时间的比较，在精度为 $\|r_k\|_2<10^{-7}$ 时，无论 IT 上还是 CPU 上，GPNSS(IU)都具有一定的优越性.

表 4.7　$b=1$ 时，CPU 时间和迭代步数(IT)的比较

n_0		3	4	5	6
NSS	IT	41	62	98	264
	CPU	0.2968	1.0938	3.4063	20.9060

续表

n_0		3	4	5	6
GNSS	IT	37	62	94	134
	CPU	0.2968	1.0313	2.9688	7.4375
GPNSS(ILU)	IT	35	50	69	95
	CPU	0.0937	0.2343	1.0625	2.5469
GPNSS(IU)	IT	17	23	30	40
	CPU	0.0937	0.3281	0.9843	2.2344

表 4.8 $b=10$ 时,CPU 时间和迭代步数(IT)的比较

n_0		3	4	5	6
NSS	IT	61	94	139	195
	CPU	0.3130	1.1875	3.7344	8.4063
GPNSS(ILU)	IT	77	99	126	160
	CPU	0.1875	0.5312	1.5000	4.2188
GPNSS(IU)	IT	25	40	60	71
	CPU	0.2185	0.4843	1.5156	2.7500

例 4.3 考虑线性代数方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$,系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}\\ -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} & 0.5\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2m^2\times 2m^2},$$

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2m^2\times m^2}$$

$\boldsymbol{T}=\mathrm{tridiag}(-1,2,-1)\in\mathbf{R}^{m\times m}$,$\boldsymbol{F}=\delta h\cdot\mathrm{tridiag}(-1,1,0)\in\mathbf{R}^{m\times m}$,$h=\dfrac{1}{m+1}$ 为网格步长.由于 HSS 迭代为 NSS 迭代的一种特殊情况,所以,在数值实验中,我们选择

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*),\quad \boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)$$

通过计算,我们发现

$$\eta_{\max}<\sqrt{\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}},\quad e_{\min}^2<\Upsilon_{\max}\Upsilon_{\min}<e_{\max}^2,$$

由定理 4.3,GPNSS 迭代方法无条件收敛,且两个参数 α,β 取值相同. 事实上,$\alpha=\beta=\sqrt{\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}}$,表 4.9 给出了迭代矩阵谱半径的比较,表 4.10 给出了迭代步数和 CPU 时间的比较.

表 4.9　$\delta=10$ 时,谱半径的比较

m		5	10	15	20
NSS(GNSS)	α	1.9319	1.1268	0.7806	0.5963
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$	0.7099	0.6148	0.8335	0.9086
GPNSS(ILU)	α	1.8157	1.0646	0.8519	0.7763
	β	1.8157	1.0646	0.8519	0.7763
	$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.3646	0.5287	0.6034	0.6318

表 4.10　$\delta=10$ 时,迭代步数和 CPU 时间的比较

m		5	10	15	20
NSS(GNSS)	IT	34	60	93	123
	CPU	0.3405	7.1903	78.6130	428.5062
GPNSS(ILU)	IT	0.6180	0.8172	0.9421	1.0213
	CPU	0.1102	2.9242	44.0634	196.5727

注 4.5　对于给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$,它的正规/反对称矩阵分裂不是唯一的,为了方便,在数值试验中,我们选择了对称/反对称分裂. 为了获得更快的收敛速率,当然可以选择其他类型的正规/反对称矩阵分裂,这也是我们未来要研究的问题之一.

第 5 章 基于SOR迭代的复对称线性系统的MHSS加速方法

5.1 简介

复线性代数系统广泛出现在科学与工程计算的许多领域，例如光学层析成像，量子力学，分子散射和结构力学等．其中复对称线性系统（即系数矩阵的实部和虚部均为对称矩阵）由于其特殊的结构和广泛的应用背景，吸引着越来越多的学者的关注．针对复线性方程组的直接解法是最早出现的求解方法，但是当矩阵规模较大时，由于直接解法的存储量和计算量一般很大，所以迭代法在近年来越来越受到重视．目前，迭代法已成为求解大型稀疏复对称线性方程组的主要方法．然而，由于复系数矩阵在方程组的规模较大或系数矩阵的条件数较大时，系数矩阵容易呈现病态特征，所以许多适用于实线性代数方程组的迭代方法，如共轭梯度方法（CG）、预共轭梯度方法（PCG），对于复线性代数方程组的求解效果并不理想，存在着不收敛或收敛速度慢的问题．于是，很多学者对原线性代数方程采用适当的预处理技术，例如 SSOR 预处理、多项式预处理、不完全分解预处理、C-to-R 等预处理方法，用来降低系数矩阵的条件数，改善矩阵病态特性，以加快迭代方法的收敛速度．

对于复线性代数方程组的求解，另一种方法就是将其转化为等价的实系数线性代数方程组，这样就可以将实系数线性代数方程组的解法用在复系数线性代数方程组的求解上．

例如，我们考虑下面的复系数线性代数方程组的求解问题：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5.1}$$

其中，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\mathrm{i}\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}+\mathrm{i}\boldsymbol{g}$，这里，矩阵 $\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}$ 均为实系数矩阵，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{g}$ 都是实向量，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位．方程组(5.1)可以写成下列形式：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{T} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

这里需要强调的是，方程组(5.1)的实系数形式并不唯一，例如，也可以将其写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{T} & -\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{W} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

然而普通迭代法求解式(5.2)或者式(5.3)，其收敛速度往往要慢于最初始的复系数线性

代数方程组(5.1). 尽管如此,我们依然可以借助复系数线性方程组的实系数形式,构造合适的预处理子,来加快迭代方法收敛的速度.

近来,基于矩阵的对称和反对称分裂(HSS)技术,白中治,Golub,Ng 等提出了修正的对称和反对称分裂(MHSS)方法,MHSS 迭代方法保持了 HSS 迭代方法的优点,即对于格式中 $\forall \alpha>0$,MHSS 迭代均无条件收敛到复线性代数方程组(5.1)的解. 同时又克服了 HSS 方法中的不足,即避免了在迭代中计算系数矩阵为复数矩阵的情形. MHSS 方法是针对矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 为对称矩阵情形下对 HSS 方法的推广。很多学者对 MHSS 方法进行了推广. 王坤针对复系数线性方程组的特点,对 MHSS 算法进行了修正,提出了 MLHSS 迭代方法. 2013 年,郭晓霞、王坤讨论了矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 为非对称情形的情况,并给出了收敛定理,进行了数值实验,证明了方法的有效性.

本章首先回顾修正的 HSS 迭代方法及其收敛定理,为了提高复线性代数方程组的求解效率,基于 NSS 超松弛加速迭代格式,提出一类求解复线性代数方程组的超松弛迭代 MHSS 加速迭代格式. 然后推导该加速迭代方法的收敛条件以及加速迭代格式中参数 ω 的选取办法,最后用数值实验证明方法的正确性和有效性.

5.2　MHSS 迭代方法

考虑求解大型稀疏线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in \mathbf{C}^n \tag{5.4}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 为大型稀疏复对称矩阵,即 $\boldsymbol{A}$ 具有下述形式:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T} \tag{5.5}$$

矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和实正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$. $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位. 为了保证 $\boldsymbol{A}$ 为非 Hermit 矩阵,我们假定 $\boldsymbol{T}\neq\boldsymbol{0}$. 为了避免在迭代中计算系数矩阵为复数矩阵,白中治,Golub,Ng 提出了修正的对称和反对称分裂(MHSS)方法,迭代格式定义如下:

MHSS 迭代方法:给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$,对于 $k=0,1,2\cdots$,直到$\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$收敛,计算

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})x^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})x^{(k)}+\boldsymbol{b},\\(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})x^{(k+1)}=(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})x^{(k+\frac{1}{2})}-\mathrm{i}\boldsymbol{b},\end{cases} \tag{5.6}$$

其中 $\alpha>0$,$\boldsymbol{I}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵.

对于 MHSS 迭代方法的收敛性,我们有下面两个收敛定理.

定理 5.1　假设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{T}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,分别为实正定矩阵和实正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$为虚数单位. 对于$\forall\alpha>0$,MHSS 迭代矩阵的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$都满足

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\sigma(\alpha)$$

其中

$$\boldsymbol{M}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T}),$$

$$\sigma(\alpha) \equiv \max_{\lambda_j \in \lambda(\boldsymbol{W})} \frac{\sqrt{\alpha^2+\lambda_j^2}}{\alpha+\lambda_j}$$

其中,$\lambda(\boldsymbol{W})$表示矩阵$\boldsymbol{W}$的谱集,因此,

$$\rho(\boldsymbol{W}(\alpha)) \leqslant \sigma(\alpha) < 1, \quad \forall \alpha > 0,$$

即对$\alpha>0$,MHSS迭代方法收敛到线性方程组(5.4)的唯一解$\boldsymbol{x}^* \in \mathbf{C}^n$.

定理5.1说明了MHSS方法的收敛速率只与对称正定矩阵$\boldsymbol{W}$的特征值有关,而与矩阵$\boldsymbol{T}$的特征值以及矩阵$\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$的特征向量无关. 若已知矩阵$\boldsymbol{W}$的最大和最小特征值,便可以得到使得谱半径$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$上界$\sigma(\alpha)$取得极小时参数的计算方法.

定理5.2 假设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{T}\in\mathbf{R}^{n\times n}$分别为实正定矩阵和实正半定矩阵且满足$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}$,$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$为虚数单位. 令$\Upsilon_{\min}$和$\Upsilon_{\max}$代表对称正定矩阵$\boldsymbol{W}$的特征值的最大值和最小值,那么

$$\alpha^* = \arg\min_{\alpha}\left\{\max_{\Upsilon_{\min}\leqslant\lambda\leqslant\Upsilon_{\max}} \frac{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}}{\sqrt{\alpha+\lambda}}\right\} \equiv \sqrt{\Upsilon_{\min}\Upsilon_{\max}}$$

相应地,

$$\sigma(\alpha^*) = \frac{\sqrt{\Upsilon_{\min}+\Upsilon_{\max}}}{\sqrt{\Upsilon_{\min}}+\sqrt{\Upsilon_{\max}}} = \frac{\sqrt{\kappa(\boldsymbol{W})+1}}{\sqrt{\kappa(\boldsymbol{W})+1}}$$

其中,$\kappa(\boldsymbol{W})=\Upsilon_{\max}/\Upsilon_{\min}$表示矩阵$\boldsymbol{W}$的谱条件数.

5.3 基于SOR迭代的MHSS加速方法

5.3.1 MHSS加速方法的建立

下面我们基于NSS超松弛加速迭代格式,提出一类求解复线性代数方程组的超松弛MHSS加速迭代格式. 为了给出MHSS加速迭代方法,我们首先考虑下面两个不动点方程:

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{x} &= (\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b},\\ (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{y} &= (\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{b},\end{aligned} \tag{5.7}$$

容易得到,这两个不动点方程的解与方程组(5.4)的解有如下关系.

定理5.3 如果$\boldsymbol{x}^*\in\mathbf{C}^n$是(5.4)的解,那么同时也是式(5.7)中两个方程的不动点;反过来,如果$\boldsymbol{x}^*\in\mathbf{C}^n$是(5.7)中任一个方程的不动点,那么也是式(5.4)的解.

证明:设$\boldsymbol{x}^*\in\mathbf{C}^n$是(5.4)的解,由方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$和$-\mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=-\mathrm{i}\boldsymbol{b}$同解,以及

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* &= (\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^*\\ &= (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^* - (\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}\\ \mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* &= (-\mathrm{i}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^*\\ &= (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^* - (\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^* = -\mathrm{i}\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

可知,定理结论成立.

下面,我们将两个不动点方程等价转换写成具有2×2分块结构的线性方程组,

$$\boldsymbol{A}_0(\alpha)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W} & -(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\ -(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}) & \alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ -\mathrm{i}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}\tag{5.8}$$

定理 5.4 证明了 $\boldsymbol{A}_0(\alpha)$ 为非奇异矩阵，定理 5.5 证明了求解式(5.1)和求解式(5.8)是等价的. 从而我们可以从式(5.8)出发建立 MHSS 迭代加速方法.

定理 5.4　假设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{T}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别为实正定矩阵和实正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位. 对于 $\forall\alpha>0$，矩阵

$$\boldsymbol{A}_0(\alpha)=\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W} & -(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\ -(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}) & \alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}\end{bmatrix}\in\mathbf{C}^{2n\times 2n}$$

为非奇异矩阵.

证明　由于 $\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{T}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 分别为对称正定和对称半正定矩阵，因此，对于 $\forall\alpha>0$，$\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}$ 和 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}$ 为正定的非奇异矩阵，除此之外，成立

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_0(\alpha)&=\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W} & -(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\ -(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}) & \alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ -(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}) & (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W} & -(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Gamma}(\alpha)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.9}$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})-(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})$ 为矩阵的 Schur 补且

$$\boldsymbol{\Gamma}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}(\alpha))$$

$\boldsymbol{M}(\alpha)$ 为 MHSS 迭代方法的迭代矩阵，由文献[113]中定理 2.1，对于 $\forall\alpha>0$，$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))<1$. 因此，$\boldsymbol{A}_0(\alpha)$ 为非奇异矩阵，定理证毕.

利用定理 5.4，两个不动点方程(5.7)构成了一个 2×2 块状线性代数方程组，这个方程组与(5.4)等价，于是得到下面定理：

定理 5.5　假设 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 5.4 的条件. 如果 $\boldsymbol{x}^*\in\mathbf{C}^n$ 是(5.4)的解，那么 $\boldsymbol{z}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^*\\ \boldsymbol{x}^*\end{bmatrix}\in\mathbf{C}^{2n}$ 为线性方程组(5.8)的解，反之，若 $\boldsymbol{z}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^*\\ \boldsymbol{y}^*\end{bmatrix}\in\mathbf{C}^{2n}$ 为线性方程组(5.8)的解，那么 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{y}^*$ 必然成立，且 $\boldsymbol{x}^*$ 为式(5.4)的解.

证明：利用定理 5.4 和简单计算可以得到定理的结论，证明过程略.

下面，我们由式(5.8)出发，给出分块 Jacobi 迭代和超松弛(SOR)迭代算法：

块 Jacobi 迭代方法：给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，$\boldsymbol{y}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$ 对于 $k=0,1,2\cdots$，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}[(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{y}^{(k)}+\boldsymbol{b}],\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}[(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(k)}-\mathrm{i}\boldsymbol{b}],\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$，$\boldsymbol{I}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵.

Jacobi 迭代方法也可以等价地写为

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)}=\boldsymbol{J}(\alpha)\boldsymbol{z}^{(k)}+\boldsymbol{C}(\alpha)$$

其中

$$\boldsymbol{J}(\alpha)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\ -(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}) & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{C}(\alpha)=\begin{bmatrix}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{b}\\ -(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\mathrm{i}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}$$

2×2 分块结构的线性方程组(5.8)的块 SOR 迭代格式定义如下：

块 SOR 迭代方法 给定一个初值 $\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{y}^{(0)}\in\mathbf{C}^n$，对于 $k=0,1,2\cdots$，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(k+1)}=(1-\omega)\boldsymbol{x}^{(k)}+\omega(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}[(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{y}^{(k)}+\boldsymbol{b}],\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}=(1-\omega)\boldsymbol{y}^{(k)}+(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}[(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\mathrm{i}\boldsymbol{b}],\end{cases}\tag{5.11}$$

其中 $\alpha>0,\omega$ 为松弛参数. $\boldsymbol{I}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵.

式(5.11)也可以等价地写为

$$\boldsymbol{z}^{(k+1)}=\Upsilon_\omega(\alpha)\boldsymbol{z}^{(k)}+\boldsymbol{C}_\omega(\alpha)$$

其中

$$\Upsilon_\omega(\alpha)=\begin{bmatrix}(1-\omega)\boldsymbol{I} & \omega(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\ \omega(1-\omega)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}) & (1-\omega)\boldsymbol{I}+\omega^2\boldsymbol{M}(\alpha)\end{bmatrix}\tag{5.12}$$

这里，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ 为 MHSS 迭代方法的迭代矩阵.

注 5.1 当 $\omega=1$ 时，块 SOR 退化为块 2×2 线性方程组(5.8)的块 G-S 迭代，相应地 $\Upsilon_\omega(\alpha)$T 退化为 G-S 迭代矩阵 $\Upsilon_1(\alpha)$.

5.3.2 MHSS 加速方法收敛性的证明

由块 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{J}(\alpha)$，块 G-S 迭代矩阵 $\Upsilon_1(\alpha)$和 *MHSS* 迭代矩，容易得到下面的定理：

定理 5.6 ① 如果 μ 是 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的特征值，那么 μ^2 是 $\Upsilon_1(\alpha)$的特征值. 如果 θ 为 $\Upsilon_1(\alpha)$的一个非零特征值且 $\mu^2=\theta$，那么 μ 为 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的特征值. 因此块 Jacobi 迭代方法收敛的充分必要条件是块 G-S 迭代方法收敛，且如果二者均收敛，那么 $\rho(\Upsilon_1(\alpha))=\rho(\boldsymbol{J}^2(\alpha))<1$.

② 块 G-S 迭代矩阵 $\Upsilon_1(\alpha)$的非零特征值集合等于 MHSS 迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha)$的特征值集合. 因此，G-S 迭代收敛当且仅当 MHSS 迭代收敛；如果二者同时收敛，我们有 $\rho(\Upsilon_1(\alpha))=\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))<1$.

利用定理 5.6 及相关文献，我们马上得出下面的推论：

推论 5.1 假设 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 5.4 的条件. 块 G-S 迭代方法和 MHSS 迭代方法均无条件收敛，且 $\rho(\Upsilon_1(\alpha))=\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))=\rho(\boldsymbol{J}^2(\alpha))<1$.

注 5.2 推论 5.1 说明了 G-S 迭代和 MHSS 迭代的渐近收敛速率是一样的，且二者的收敛速率是块 Jacobi 迭代收敛速率的 2 倍.

下面我们进一步讨论块 SOR 方法的收敛条件. 由于系数矩阵 $\boldsymbol{A}_0(\alpha)$具有块状性质 A，我们可以得出 SOR 迭代矩阵 $\Upsilon_\omega(\alpha)$和 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的特征值之间具有下面的关系：

定理 5.7 假设 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 5.4 的条件. $\boldsymbol{J}(\alpha)$，$\Upsilon_\omega(\alpha)$分别由式(5.10)和式(5.12)所定义，则：

① 设 λ 为 $\Upsilon_\omega(\alpha)$的非零特征值，则由关系式

$$(\lambda+\omega-1)^2=\lambda\omega^2\mu^2\tag{5.13}$$

所确定的 μ 为 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的特征值.

② 若 μ 为 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的特征值，则由关系式(5.13)所确定的 λ 为 $\Upsilon_\omega(\alpha)$的特征值.

证明 略.

最后，由推论 5.1 和定理 5.7，得到块 SOR 迭代方法的收敛定理：

定理 5.8 假设 $\boldsymbol{A}$ 满足定理 5.4 的条件. $\boldsymbol{J}(\alpha)$，$\Upsilon_\omega(\alpha)$分别由式(5.10)和式(5.12)所定义，则：

① 当 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的所有特征值为实数时，$\rho(\Upsilon_\omega(\alpha))<1$ 的充分必要条件是 $0<\omega<2$.

② 当 $\boldsymbol{J}(\alpha)$的某些特征值为虚数时，如果对于某个整数 $\tau\in(0,1)$，$\Upsilon_\omega(\alpha)$的每个特征值 $\mu=\delta+\mathrm{i}\beta$，点$(\delta,\beta)$都落在椭圆

$$\varepsilon(1,\tau)\overset{\text{def}}{=\!=}\left\{(\delta,\beta):\delta^2+\frac{\beta^2}{\tau^2}=1\right\}$$

的内部且 $0<\omega<\dfrac{2}{1+\tau}$，则 $\rho(\Upsilon_\omega(\alpha))<1$.

证明　略.

5.3.3　数值实验

下面，我们用数值实验来检验 SOR 方法对 MHSS 的加速效果.

考虑求解下列复线性代数方程组

$$\left[\left(\boldsymbol{K}+\frac{3+\sqrt{3}}{\tau}\boldsymbol{I}\right)+\mathrm{i}\left(\boldsymbol{K}+\frac{3-\sqrt{3}}{\tau}\boldsymbol{I}\right)\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

其中 τ 表示时间步长，$\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{n\times n}=\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{V}_m+\boldsymbol{V}_m\otimes\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{V}_m=h^{-2}\mathrm{tridiag}(-1,2,-1)\in\mathbf{R}^{m\times m}$表示在$[0,1]\times[0,1]$上满足齐次边值条件的拉普拉斯算子经过五点差分离散所得到的矩阵，因此，$\boldsymbol{K}$ 为 $n\times n$ 块三对角矩阵，$n=m^2$，空间步长 $h=\dfrac{1}{m+1}$，右端向量 $\boldsymbol{b}$ 的元素

$$b_j=\frac{(1-\mathrm{i})j}{\tau(j+1)^2},\quad j=1,2,3,\cdots$$

这里 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$为虚数单位. 经过计算，得到

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{K}+\frac{3+\sqrt{3}}{\tau}\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{T}=\boldsymbol{K}+\frac{3-\sqrt{3}}{\tau}\boldsymbol{I}$$

为了方便，在 SOR 加速算法 3 中，参数 α 与 MHSS 方法中参数的选取一致，另外，在所有情形下，取 $\omega=1.2$. 从表 5.1 中可以看出，在各种测试下，基于 SOR 迭代的 MHSS 加速方法在迭代步数(IT)和时间(CPU)上都要优于 MHSS 迭代方法.

表 5.1　迭代步数和迭代时间的比较

$m^2\times m^2$	MHSS 方法		MHSS 加速方法	
	IT	CPU	IT	CPU
$20^2\times20^2$	111	24.273	71	9.921
$25^2\times25^2$	134	82.540	87	37.752
$30^2\times30^2$	159	176.51	103	114.86
$40^2\times40^2$	207	966.72	135	645.12

5.3.4　总结

本章提出了一类求解大型稀复疏线性代数方程组加速 MHSS 方法，并分析了方法的收敛性质，数值实验证明了加速 MHSS 方法在迭代步数和迭代时间上都优于 MHSS 方法. 最后，我们要强调的是，为了方便，本文中加速方法中松弛参数 ω 的值选为 1.2，事实上，ω 最优值的讨论是一个很有意义和难度的问题，将在以后继续研究.

第 6 章 非线性系统的迭代法

6.1 简介

本章我们主要研究形如

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{6.1}$$

的大型稀疏非线性代数方程组数值解法. 这里,$\boldsymbol{F}: D \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 是开凸区域 D 上的一个非线性连续可微函数. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ 是稀疏、非对称正定的. 对于方程(6.1)的数值求解,已经有很多学者做了大量广泛深入而富有成效的研究工作,并且已经得到了一系列实用高效的计算方法. 在迄今发展起来的各种求解非线性方程组(6.1)的数值方法中,Newton 法是最基本和最重要的方法之一. Newton 法的优点是收敛速度快,其不足则是好的初值难以选到,并且在迭代的每步均需计算和形成 Jacobi 矩阵,以及需要精确求解 Newton 方程. 当 Jacobi 矩阵难以形成,或者当问题的规模较大时,Newton 法的计算代价就很昂贵. 此外,不具有全局收敛性质则是 Newton 法的另一个缺点. 为降低 Newton 法的使用成本,在 1982 年,Dembo 和 Eisenstat 提出了求解非线性方程组的不精确 Newton 法. 不精确 Newton 法就是在 Newton 法的每步迭代只对 Newton 方程进行近似求解. 不精确 Newton 法的本质就是一类内外迭代算法. 外迭代为经典 Newton 法,内迭代则可采用任何能够准确而有效地计算 Newton 方程解的线性迭代法. 由此,许多求解线性方程组的迭代方法,例如 GMRES 方法、CG 方法、SOR 方法等,都可以用来求解 Newton 方程,从而得到相应的 Newton-GMRES 方法、Newton-CG 方法、Newton-SOR 方法等. 理论分析表明,不精确 Newton 法是求解大规模稀疏非线性方程组的有效方法.

2010 年,白中治、郭学萍等将求解大型系数非埃尔米特正定线性方程组的对称/反对称分裂 HSS 迭代方法与不精确 Newton 法相结合,得到了一类 Newton-HSS(NHSS)方法,数值实验证明了 NHSS 的稳健性和有效性. 然而 NHSS 方法只具有局部收敛性质. 2011 年,郭学萍等对 NHSS 方法进行了改进,即在不精确 Newton 方向上配以线性搜索后退策略,提出了一种 Newton-HSS 后退方法,证明了它的全局收敛性. 杨爱利、伍渝江等将 Newton-HSS 方法进一步推广,提出了一类求解非线性方程组的 Newton-PSS 迭代法. 除此之外,当弱非线性代数方程组 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 时,白中治等利用 Picard 迭代作为外迭代,HSS 方法作为内迭代,提出了求解弱非线性代数方程组的 Picard-HSS 和非线性 HSS-like 迭代方法,这两类方法在计算的过程中均不需要在当前迭代步 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 处计算和形成 Jacobi 矩阵,且在内迭代 HSS 方法中出现的两个子线性代数方程组的系数矩阵

不随迭代步数的变化而变化. 和 Newton-HSS 方法相比,这两类方法大大减少了算法的工作量,提高了求解速度.

然而当弱非线性代数方程组

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \tag{6.2}$$

的系数矩阵具有下述形式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$$

矩阵 $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T},\boldsymbol{\Phi}: D\subset\mathbf{C}^n\rightarrow\mathbf{C}^n$ 为定义在复线性空间 $\mathbf{C}^n$ 的一个开凸子集 D 上的连续可微函数,且非线性函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})$ 在解 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 处是非 Hermite 和负半定的. 此种情况下,Picard-HSS 和非线性 HSS-like 方法收敛速度会大大降低,这是因为在 Picard 迭代的每一步利用 HSS 方法求解时,会出现两个系数矩阵分别为 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}$ 和 $\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$ 的线性代数方程组,对于后一个方程组,往往需要利用重复法求解. 大大影响了求解非线性方程组的求解速度.

对于非线性代数方程组(6.1),我们将 LHSS 方法与不精确 Newton 法相结合,并在不精确 Newton 方向上配以线性搜索策略,提出了具有全局收敛性质的不精确 Newton-LHSS 后退方法,对于具有特殊结构的弱线性代数方程组(6.2),我们提出了 Picard-AHSS 方法和 AHSS-like 方法以及 Picard-MHSS 方法,对于每种方法都仔细分析了其收敛性,给出相应的收敛定理. 大量的数值实验证明了理论的正确性及方法的有效性.

6.2　关于 Newton-LHSS 后退方法及其全局收敛性的研究

本章采用的范数均为欧式范数. 记 $B(\boldsymbol{x},r)\equiv\{\boldsymbol{y}\mid\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|<r\}$ 是一个以 $\boldsymbol{x}$ 为中心,以 $r>0$ 为半径的开球. $\bar{B}(\boldsymbol{x},r)$ 表示 $B(\boldsymbol{x},r)$ 的闭包. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置.

6.2.1　Newton-LHSS 后退方法的提出

不精确 Newton 方法仅具有局部收敛性质,如果使用 LHSS 方法求解 Newton 方程,并在其不精确 Newton 方向 $\boldsymbol{s}_k$ 上配以线性搜索策略,则可以得到具有全局收敛性质的不精确 Newton-LHSS 后退方法(NLHSSB 方法). 该方法可以简述如下.

给定 $\boldsymbol{x}_0,\eta_{\max}\in[0,1),t\in(0,1)$,正常数 α,正整数列 $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$, $0<\theta_{\min}<\theta_{\max}<1,\mathrm{tol}>0$. 如果 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|>\mathrm{tol}\cdot\min\{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\|,\sqrt{n}\}$,则由 $\boldsymbol{x}_k$ 求得 $\boldsymbol{x}_{k+1}$,分以下三步进行:

第一步: 选取 $\eta_k\in[0,\eta_{\max}]$,令 $\boldsymbol{d}_{k,0}=\boldsymbol{0}$.

对于 $l=0,1,2,\cdots,l_k-1$,应用 LHSS 方法

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{d}_{k,l+\frac{1}{2}}=-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{d}_{k,l}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k),\\(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{d}_{k,l+1}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_k))\boldsymbol{d}_{k,l+\frac{1}{2}}-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\end{cases}$$

求得 $\boldsymbol{d}_{k,l_k}$,使得 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{d}_{k,l_k}\|\leqslant\eta_k\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|$

这里,$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_k)=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_k)^*)$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_k)=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)^*)$

第二步: 沿着不精确 Newton 方向 $\boldsymbol{d}_{k,l_k}$ 配以线性搜索后退策略,具体方法如下:

① 置 $\bar{d}_k = d_{k,l_k}$，$\bar{\eta}_k = \eta_k$.

② 如果 $\| F(x_k + \bar{d}_k) \| > [1 - t(1 - \bar{\eta}_k)] \| F(x_k) \|$

选取 $\theta = [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$

置 $\bar{d}_k = \theta \bar{d}_k$，$\bar{\eta}_k = 1 - \theta(1 - \bar{\eta}_k)$，

第三步：$x_{k+1} = x_k + \bar{d}_k$.

值得指出的是，在不精确 Newton 法中，当迭代点 x_k 远离非线性方程组(6.1)的真解时，不宜选用过小的强制项．否则，很可能会导致 oversolving 现象，即对于 Newton 方程的求解达到适当的精度时，$\| F(x_k) \|$ 就会得到最好的下降．若这时再对 Newton 方程一味地去精确求解，则可能会造成大量的计算开销，并且对 $\| F(x_k) \|$ 的下降也起不到好的作用，更有可能会导致中断现象.

本书选取下面两种强制序列，这两种方法现已得到广泛而成功的应用.

选择 1. 给定 $\bar{\rho} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\forall \eta_0 \in [0,1)$，选取 $\eta_k = \dfrac{\left| \| F(x_k) \| - \| F(x_{k-1}) + F'(x_{k-1}) d_{k-1} \| \right|}{\| F(x_{k-1}) \|}$，$k = 0,1,2,\cdots$

为了防止 η_k 过小，进一步计算 η_k，即采取“保护措施”：

保护措施 1：如果 $\eta_{k-1}^{\bar{\rho}} > 0.1$，则置 $\eta_k = \max\{\eta_k, \eta_{k-1}^{\bar{\rho}}\}$.

选择 2. 给定 $\lambda \in [0,1]$ 和 $\rho \in (1,2]$，对于 $\forall \eta_0 \in [0,1)$，选取 $\eta_k = \lambda \left(\dfrac{\| F(x_k) \|}{\| F(x_{k-1}) \|} \right)^{\rho}$，$k = 0,1,2,\cdots$

保护措施 2：如果 $\lambda \eta_{k-1}^{\rho} > 0.1$，则置 $\eta_k = \max\{\eta_k, \lambda \eta_{k-1}^{\rho}\}$.

除此之外，为了防止出现 oversolving 现象，文献[143]提出了两种“保护措施”，即

保护措施 3：$\eta_k \leftarrow \min\{\eta_k, \eta_{\max}\}$

保护措施 4：如果 $\eta_k \leqslant 2\varepsilon / \| F(x_k) \|$，则令 $\eta_k \leftarrow 0.8\varepsilon / \| F(x_k) \|$.

6.2.2 Newton-LHSS 后退方法的全局收敛性定理

为了得到 NLHSSB 方法的全局收敛性定理，首先做出如下假设，并给出引理 6.1：

假设 6.1 给定初值 $x_0 \in \mathbf{C}^n$，$F: D \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 在一个开邻域 $N_0 \subset D$ 内是 G-可微的. $F'(x)$ 在 N_0 中是连续、正定的．假设 $F'(x) = H(x) + S(x)$，其中 $H(x) = \dfrac{1}{2}(F'(x) + F'(x)^*)$，$S(x) = \dfrac{1}{2}(F'(x) - F'(x)^*)$ 分别为 Jacobi 矩阵 $F'(x)$ 的对称部分和反对称部分．除此之外，假设下面条件成立：

(A_1) LHSS 方法收敛.

(A_2) (Lipschitz 条件)存在非负常数 L_h 和 L_s 使得对所有的 $x, y \in B(x_0, r) \subset N_0$，有

$$\| H(x) - H(y) \| \leqslant L_h \| x - y \|, \quad \| S(x) - S(y) \| \leqslant L_s \| x - y \|$$

在假设 6.1 下，应用扰动引理，我们得到引理 6.1.

引理 6.1　在假设 6.1 下，我们有下面三个结论成立：

(1)　$\|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{y})\| \leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$，这里，$L=L_h+L_s$.

(2)　$\|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})\| \leqslant L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|+2\beta$

(3) 如果 $r<\dfrac{1}{\gamma L}$，那么 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ 是非奇异的，并且满足 $\|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})^{-1}\| \leqslant \dfrac{\gamma}{1-\gamma L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}$.

假设 6.1 保证了引理 6.1 成立. 这就意味着 $\boldsymbol{F}'$ 是 Lipschitz 连续的，Lipschitz 常数为 L，存在一个正常数 m_f，使得在集合 $\Omega(\{\boldsymbol{x}_n\},r)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n\| \leqslant r\}$ 上满足 $\|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})^{-1}\| \leqslant m_f$. 利用相关文献中的定理，我们有下面的两个全局收敛定理.

定理 6.1　给定初值 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{C}^n$，$t\in(0,1)$. 假设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是由 NLHSSB 算法得到的序列，η_k 是由选择 1 和所有的保护措施给定. 假设序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界，假设 6.1 成立. 那么 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ 的一个根 $\boldsymbol{x}^*$，且有下面两个结论成立：

① 如果 $\eta_k\to 0$，则 NLHSSB 方法具有强-超线性收敛速度.

② 如果对于某个 $K_\eta>0$，如果 $\eta_k \leqslant K_\eta\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|^p$，则 NLHSSB 方法具有强 $1+p$ 阶收敛速度.

定理 6.2　给定初值 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{C}^n$，$t\in(0,1)$. 假设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是由 NHSSB 算法得到的序列，η_k 是由选择 2 和所有的保护措施给定. 假设序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 有界，假设 6.1 成立. 那么 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ 的一个根 $\boldsymbol{x}^*$，且有下面两个结论成立：

① 如果 $\lambda<1$，则 NLHSSB 算法是强-ρ 阶收敛的.

② 如果 $\lambda=1$，则 NLHSSB 算法是弱-ρ 阶收敛的；对于任意 $\rho\in[1,\rho)$，NLHSSB 算法是强-p 阶收敛的.

6.2.3　数值实验

考虑下面的二维非线性反应扩散方程

$$\begin{cases} -(u_{xx}+u_{yy})+q(u_x+u_y)=-\mathrm{e}^u, & (x,y)\in\Omega \\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega \end{cases}$$

其中 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，q 为正常数. 应用五点差分格式离散扩散项，中心差分格式离散对流项. $h=\dfrac{1}{N+1}$，$\mathrm{Re}=\dfrac{qh}{2}$ 分别表示网格步长和网格雷诺数. 我们得到下面的非线性方程组：

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{u}+h^2\mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_N)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}_i=(u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{iN})^{\mathrm{T}},i=1,2,\cdots,N \end{cases}$$

这里 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}_x\otimes\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{T}_y$，$\otimes$ 表示克罗内克内积，$\boldsymbol{T}_x$ 和 $\boldsymbol{T}_y$ 表示三角矩阵.

$$\boldsymbol{T}_x=\mathrm{tridiag}(t_2,t_1,t_3)$$
$$\boldsymbol{T}_y=\mathrm{tridiag}(t_2,0,t_3),$$
$$t_1=4,\quad t_2=-1-\mathrm{Re},\quad t_3=-1+\mathrm{Re}$$

选择下面 4 种强制序列：

① 选择 1,保护措施 1,保护措施 3,保护措施 4.

② 选择 2,保护措施 2,保护措施 3,保护措施 4.

③ 对于所有的 k,选取 $\eta_k=0.01$.

④ $\eta_k=\dfrac{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|-\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{d}_{k-1}\|}{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|}$, $k=0,1,2,\cdots$,

保护措施 1,保护措施 3,保护措施 4.

注意,第一种强制序列和第四种强制序列计算方法在分母上稍有不同,因为 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|$ 比 $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_{k-1})\|$ 更接近于当前迭代的值,所以在强制序列的计算中采用此值是合理的. 对于算法中参数的选择,我们在①、②、④中,选取 $\eta_0=0.5$,$\eta_{\max}=0.9$. 在线性搜索中,选取 $t=10^{-4}$,$\theta_{\min}=0.1$,$\theta_{\max}=0.5$. 在算法 NLHSSB 中,选择 $\theta\in[\theta_{\min},\theta_{\max}]$使得 $g(\theta)\equiv\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k+\theta\boldsymbol{d}_k)\|^2$取得最小. $\lambda=1$,$\rho=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 除此之外,选择 $q=1$,$\boldsymbol{x}_0=5\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)$,$N=20$. 表 6.1～6.4 给出了在 4 种强制序列的选择下,NLHSSB 方法和 NHSSB 方法的比较结果. 从表 6.1～表 6.4 中可以看出,NLHSSB 方法在 CPU 时间和迭代步数上都优于 NHSSB 方法.

表 6.1 强制序列 1 情形,两种方法的比较

方 法	外迭代数	内迭代数	$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_k)\|$	CPU 时间
Newton-HSS 方法	8	2	15.541	0.1402
		3	6.385	0.2804
		7	2.2402	0.5608
		9	0.7663	0.9213
		13	0.1257	1.422
		20	0.005 84	2.1932
		32	3.5753×1e−5	3.3448
		50	1.0917×1e−8	4.7669
Newton-LHSS 方法	7	2	9.3892	0.2303
		2	1.7029	0.4607
		2	0.3509	0.7110
		3	0.006 83	1.3319
		4	2.0841×1e−5	2.073
		6	1.1206×1e−8	2.6738

表 6.2　强制序列 2 情形，两种方法的比较

方　法	外迭代数	内迭代数	$\|F(x_k)\|$	CPU 时间
Newton-HSS 方法	8	2	15.541	0.1803
		3	6.385	0.3205
		7	2.399	0.5808
		9	0.8315	0.9914
		13	0.1792	1.4721
		20	0.001 58	2.1331
		32	0.000 31	3.0744
		50	4.871×1e−7	4.2561
Newton-LHSS 方法	6	2	9.3892	0.2303
		2	1.7029	0.4607
		2	0.3509	0.7110
		3	0.006 83	1.382
		4	2.0839×1e−5	2.1331
		5	1.8612×1e−8	2.6538

表 6.3　强制序列 3 情形，两种方法的比较

方　法	外迭代数	内迭代数	$\|F(x_k)\|$	CPU 时间
Newton-HSS 方法	5	47	9.3732	1.5422
		65	1.6263	3.8856
		90	0.2305	7.2004
		89	0.002	10.485
		61	2.0245×1e−7	12.238
Newton-LHSS 方法	5	8	9.3732	0.8702
		9	1.6263	2.2733
		11	0.2305	4.6267
		11	0.002	7.0301
		8	1.2112×1e−7	8.2819

表 6.4 强制序列 4 情形，两种方法的比较

方　法	外迭代数	内迭代数	$\|F(x_k)\|$	CPU 时间
Newton-HSS 方法	9	2	15.541	0.1603
		3	6.385	0.3105
		6	2.2402	0.5808
		5	1.2216	0.8111
		8	0.4194	1.1016
		12	0.072 01	1.5823
		17	0.0052	2.2532
		23	0.000 14	3.0544
		33	7.0045×1e−7	4.0458
Newton-LHSS 方法	9	2	9.3892	0.2704
		2	1.7029	0.5107
		2	0.3509	0.7510
		2	0.0555	1.1016
		2	0.0081	1.392
		2	0.0013	1.6924
		2	0.0002	1.9428
		2	3.0765×1e−5	2.1431
		3	7.3496×1e−7	2.4836

6.3 Picard-AHSS 方法及其局部收敛定理

假设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$为大型稀疏正定矩阵，函数$\boldsymbol{\Phi}: D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$为定义在复线性空间$\mathbf{C}^n$的一个开凸子集 D 上的连续可微函数，且$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 的 Jacobi 矩阵$\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})$在解 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 处是非 Hermite 和负半定的. 求解弱非线性代数方程组(6.2)

我们这里说的弱非线性方程组指的是在某种范数意义下，线性项 $\boldsymbol{Ax}$ 强占优于非线性项$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. 一个矩阵 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{C}^{n\times n}$为负半定的、负定、正半定和正定的当且仅当它的 Hermite 部分 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G})\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}})$分别是负半定的、负定、正半定和正定的. 一个矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的 Hermite/反 Hermite 分裂指的是对于任何一个矩阵 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{C}^{n\times n}$都可以分裂为一个 Hermite/反 Hermite 矩阵之和，即

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G})+\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G})$$

其中 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{G})$为 $\boldsymbol{G}$ 的 Hermite 部分，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{G})\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{G}^*)$为 $\boldsymbol{G}$ 的反 Hermite 部分.

6.3.1　AHSS 方法

考虑下列大型稀疏线性方程组

$$Ax = b$$

其中 $A \in C^{n\times n}$ 为大型稀疏矩阵，$x, b \in C^n$.

非对称的 HSS 分裂迭代格式的定义如下：

AHSS 迭代方法：给定一个初值 $x^{(0)} \in C^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，直到 $\{x^{(k)}\}$ 收敛，计算

$$\begin{cases}(\alpha I + H)x^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha I - S)x^{(k)} + b, \\ (\beta I + S)x^{(k+1)} = (\beta I - H)x^{(k+\frac{1}{2})} + b,\end{cases} \tag{6.3}$$

其中 α, β 为给定正整数，I 为与矩阵 A 同阶的单位矩阵.

上述迭代过程可以等价于

$$\begin{aligned} x^{(l+1)} &= M(\alpha,\beta)x^{(l)} + G(\alpha,\beta)b \\ &= M(\alpha,\beta)^{l+1}x^{(0)} + \sum_{j=0}^{l} M(\alpha,\beta)^j G(\alpha,\beta)b \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$l = 0,1,2,\cdots$$

其中

$$\begin{aligned} M(\alpha,\beta) &= (\beta I + S)^{-1}(\beta I - H)(\alpha I + H)^{-1}(\alpha I - S) \\ G(\alpha,\beta) &= (\alpha + \beta)(\beta I + S)^{-1}(\alpha I + H)^{-1} \end{aligned} \tag{6.5}$$

事实上，AHSS 迭代过程也可以看成是由系数矩阵 A 按下述分裂

$$A = B(\alpha,\beta) - C(\alpha,\beta)$$

得到，其中

$$B(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha I + H)(\beta I + S) \tag{6.6}$$

$$C(\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha I + H)(\beta I - H)(\alpha I + H)^{-1}(\alpha I - S) \tag{6.7}$$

显然

$$M(\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta)^{-1}C(\alpha,\beta),\ G(\alpha,\beta) = B(\alpha,\beta)^{-1} \tag{6.8}$$

当矩阵 $A \in C^{n\times n}$ 为非 Hermite 正定矩阵时，若 α, β 满足一定的条件，AHSS 方法的迭代矩阵的谱半径小于 1. 杨爱利、伍渝江等对该方法的收敛性进行了更加细致的讨论，并详细给出了两个参数的计算方法. 数值实验证明了 AHSS 方法是较 HSS 方法更加有效稳健的迭代方法.

6.3.2　Picard-AHSS 方法

下面我们给出求解非线性代数方程组的 Picard-AHSS 迭代方法.

对于非线性方程组(6.2)，当线性项 Ax 强占优于非线性项 $\Phi(x)$ 时，我们可以利用 Picard 迭代

$$Ax^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}),\quad k = 0,1,2,\cdots \tag{6.9}$$

作为外迭代计算(6.2)的解. 当矩阵 A 为大型稀疏正定矩阵，在第 k 步迭代 $x^{(k)}$ 已知时，

我们利用 AHSS 迭代格式

$$B(\alpha,\beta)x^{(k,l+1)}=C(\alpha,\beta)x^{(k,l)}+\Phi(x^{(k)}),\quad l=0,1,\cdots,l_k-1,k=0,1,2,\cdots \tag{6.10}$$

作为 Picard 迭代的内迭代算法，这里 $B(\alpha,\beta)$ 和 $C(\alpha,\beta)$ 如式(6.6)和式(6.7)定义，α,β 为给定的正常数，$\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为一指定的正整数数列，在第 k 步 Picard 迭代时，选取内迭代初值 $x^{(k,0)}=x^{(k)}$. 由此，我们可以构造出一类新的方法，称为 Picard-AHSS 方法.

Picard-AHSS 迭代方法： 设 $\Phi: D\subset \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 为一连续可微函数，矩阵 A 为一正定矩阵，$H=\frac{1}{2}(A+A^*)$，$S=\frac{1}{2}(A-A^*)$ 分别为 A 的 Hermite 部分和反 Hermite 部分. 给定初始估计 $x^{(0)}\in D$ 以及正整数序列 $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，利用下面的步骤计算 $x^{(k+1)}$，直到近似解 $x^{(k)}$ 达到给定精度.

① 设 $x^{(k,0)}:=x^{(k)}$.

② 对于 $l=0,1,2,\cdots,l_k-1$，求解下述线性方程组得到 $x^{(k,l+1)}$.

$$\begin{cases}(\alpha I+H)x^{(k,l+\frac{1}{2})}=(\alpha I-S)x^{(k,l)}+\Phi(x^{(k)}),\\(\beta I+S)x^{(k,l+1)}=(\beta I-H)x^{(k,l+\frac{1}{2})}+\Phi(x^{(k)}),\end{cases} \tag{6.11}$$

其中 α,β 为给定的正常数.

③ 令 $x^{(k+1)}=x^{(k,l_k)}$.

由上述迭代方法可知，当参数 $\alpha=\beta$ 时，Picard-AHSS 退化为 Picard-HSS 方法，也就是说，Picard-AHSS 方法实际上是 Picard-HSS 方法的一个推广，它既保持了 Picard-HSS 方法的优点，不需要在当前迭代步 $x^{(k)}$ 处计算和储存 Jacobi 矩阵，且在所有内迭代过程中，出现的两个子线性方程组的系数矩阵均为常数矩阵，又将 Picard-HSS 方法进一步优化，在内迭代过程中，对于不同的子线性代数方程组的系数矩阵选取不同的参数 α 和 β，提高了非线性代数方程组的求解效率.

6.3.3 Picard-AHSS 方法收敛定理

接下来我们给出 Picard-AHSS 方法的局部收敛定理.

首先引入下面的记号. 对于任意的向量 $x\in\mathbf{C}^n$ 和矩阵 $X\in\mathbf{C}^{n\times n}$，我们定义向量范数及其诱导范数

$$\|x\|\overset{\text{def}}{=}\|(\alpha I+S)x\|_2,\quad \|X\|\overset{\text{def}}{=}\|(\alpha I+S)X(\alpha I+S)^{-1}\|_2.$$

我们有下面的局部收敛定理：

定理 6.3 设 $x^*\in D$ 是非线性方程组(1)的解. $\Phi: D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 在点 x^* 的开邻域 $N_0\subset D$ 上 G 可导且 $\Phi'(x^*)$ 连续. 假设矩阵 A 为大型稀疏正定矩阵，$H=\frac{1}{2}(A+A^*)$，$S=\frac{1}{2}(A-A^*)$ 分别为 A 的 Hermite 部分和反 Hermite 部分. 记

$$\theta(\alpha,\beta)=\|M(\alpha,\beta)\|,\quad a=\|A^{-1}\|,\quad v=\|A^{-1}\Phi'(x^*)\|$$

若内迭代 AHSS 迭代满足收敛条件且 $v<1$，$l_0\geqslant\left\lfloor \ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right)\Big/\ln(\theta(\alpha,\beta))\right\rfloor$，则存在 x^*

的一个开邻域 $N\subset N_0$，使得对于任何初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in N$ 和任何正整数序列 $l_k, k=0,1,2,\cdots$，由 Picard-AHSS 迭代方法生成的序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 总是适定的且收敛于非线性方程组(6.2)的解 $\boldsymbol{x}^*$. 除此之外，有下式成立：

$$\limsup_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|^{\frac{1}{k}}\leqslant v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)^{l_0},\quad 其中\quad l_0=\liminf_{k\to\infty} l_k$$

特别地，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} l_k=\infty$，那么迭代序列的收敛率为 R 线性收敛的，且 R 收敛因子至多为 v，即

$$\limsup_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|^{\frac{1}{k}}\leqslant v$$

证明　由 Picard-AHSS 迭代格式(6.11)，经计算可以得到

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k}\boldsymbol{x}^{(k)}+\sum_{j=0}^{l_k-1}\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^j\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\cdots,\quad(6.12)$$

其中 $\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)$ 和 $\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)$ 由(6.5)定义. 由于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$，故有

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k}\boldsymbol{x}^*+\sum_{j=0}^{l_k-1}\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^j\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^*),\quad k=0,1,2,\cdots,\quad(6.13)$$

式(6.12)减去式(6.13)，我们得到

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k}(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=0}^{l_k-1}\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^j\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^*)],$$
$$k=0,1,2,\cdots\quad(6.14)$$

记

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*)\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)$$

则(6.14)式可以等价地写成

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\\
=&\Big[\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k}+\sum_{j=0}^{l_k-1}\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^j\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)\Big](\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)+\sum_{j=0}^{l_k-1}\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^j\boldsymbol{G}(\alpha,\beta)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^*)\\
=&[\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)](\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^*)\\
=&[\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(x^*)+\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*))](\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*)+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)^{l_k})\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^*).
\end{aligned}\quad(6.15)$$

因此

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|\leqslant&[\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)\|+\|\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)\|^{l_k}(1+\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)\|)]\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|+\\
&(1+\|\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)\|^{l_k})\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^*)\|\qquad(6.16)\\
=&[v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)^{l_k}]\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|+a(1+\theta(\alpha,\beta)^{l_k})\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^*)\|
\end{aligned}$$

由函数 $\boldsymbol{\Phi}: D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 在 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 的某个开邻域 $N_0\subset D$ 内 G 可导和 $\boldsymbol{\Phi}'$ 在 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 处连续可以得出：对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和所有的 $\boldsymbol{x}\in N$，都存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的一个开邻域 $N\subset N_0$，使得 $\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^*)\|<\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|$. 由已知条件 $v<1$，$l_0\geqslant\left\lfloor\ln\left(\dfrac{1-v}{1+v}\right)\Big/\ln(\theta(\alpha,\beta))\right\rfloor$ 可知

$$v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)<1$$

进一步假设 ε 满足

$$v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)+a(1+\theta(\alpha,\beta))\varepsilon<1$$

则当 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in N$ 并且 $l_0=\lim\limits_{k\to\infty}l_k$ 时，根据式(6.16)，利用数学归纳法，我们立刻得到

$$\|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{x}^*)\|<\varepsilon\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|$$

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|\leqslant[v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)^{l_0}+a(1+\theta(\alpha,\beta)^{l_0})\varepsilon]\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\| \quad (6.17)$$

并且对于所有的 $k=0,1,2,\cdots$ 都有 $\boldsymbol{x}^{(k)}\in N$ 成立. 由式(6.16)和式(6.17)可以得到

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}^{(k)}=\boldsymbol{x}^*,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sup\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^*\|^{\frac{1}{k}}\leqslant v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)^{l_0}+a(1+\theta(\alpha,\beta)^{l_0})\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性和 R 收敛因子范数独立可知，由 Picard-AHSS 迭代所产生的序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 的 R 收敛因子至多为 $v+(1+v)\theta(\alpha,\beta)^{l_0}$. 另外，若 $\lim\limits_{k\to\infty}l_k=\infty$，由式(6.17)可知，序列 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 是 R 线性收敛的且收敛因子至多为 v.

定理 6.3 表明，Picard-AHSS 迭代的收敛速率实质上由 v 和 $\theta(\alpha,\beta)$ 决定. 通常，v 和 $\theta(\alpha,\beta)$ 越小，Picard-AHSS 迭代的收敛速率越快. 当弱非线性方程组中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为病态时，$\theta(\alpha,\beta)$ 接近于 1，Picard-AHSS 迭代的收敛速率会变得非常慢以至于内迭代步数很多，在这种情况下，可以考虑使用预处理的 AHSS(PAHSS)迭代代替 AHSS 迭代方法，这样会使得 $\theta(\alpha,\beta)$ 小一些，不精确的 Picard 迭代的收敛速率更快一些.

本节最后，为了方便数值计算，我们将 Picard-AHSS 迭代写成等价的残量校正形式.

Picard-AHSS 的残量校正形式：设 $\boldsymbol{\Phi}:D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 为一连续可微函数，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为大型稀疏正定矩阵，$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$，$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 部分和反 Hermite 部分. 给定初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in D$ 以及正整数序列 $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，利用下面的步骤计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，直到近似解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 达到给定精度.

① $\boldsymbol{s}^{(k,0)}:=\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}^{(k)}:=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}$

② 对于 $l=0,1,2,\cdots,l_k-1$，利用下面的迭代格式求解线性方程组得到 $\boldsymbol{s}^{(k,l+1)}$：

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{s}^{(k,l+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{s}^{(k,l)}+\boldsymbol{b}^{(k)},\\(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{s}^{(k,l+1)}=(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{s}^{(k,l+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{b}^{(k)};\end{cases} \quad (6.18)$$

③ 令 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}:=\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{s}^{(k,l_k)}$.

6.3.4 非线性 AHSS-like 迭代方法及其收敛性定理

本节我们提出另一种求解(6.2)的迭代方法，叫做非线性 AHSS-like 迭代方法. 这种方法是基于非线性不动点方程

$$(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \quad \text{和} \quad (\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}=(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$$

得到的. 它既可以保持 Picard-AHSS 方法的优点，又可以避免使用显式的内迭代方程.

非线性 AHSS-like 迭代方法：给定初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in D$. 利用下面的步骤计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，直到近似解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 达到给定精度

$$\begin{cases}(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{\Phi}(x^{(k)})\\(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{(k+1)}=(\beta \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}\right)\end{cases}\tag{6.19}$$

这里，α,β 为给定的正常数，$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵.

下面给出非线性 AHSS-like 迭代方法的局部收敛定理.

定理 6.4　设 $\boldsymbol{x}^*$ 为非线性方程组(6.2)的解. $\boldsymbol{\Phi}: D\subset\mathbf{C}^n\rightarrow\mathbf{C}^n$ 在 $\boldsymbol{x}^*$ 处 F 可导. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一正定矩阵，$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*)$，$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 的 Hermite 部分和反 Hermite 部分. 记

$$\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*)=(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\beta \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*))(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)).$$

如果 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*))<1$，则 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 为非线性 AHSS-like 迭代的一个吸引子.

证明　首先，定义函数

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})=(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}((\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})),\\\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}((\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}))\end{cases}\tag{6.20}$$

和 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{V}\circ\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}))$，则非线性 AHSS-like 迭代格式(6.19)等价于

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\cdots$$

由 Ostrowski 定理，如果 $\rho(\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{x}^*))<1$. 那么 $\boldsymbol{x}^*$ 为非线性 AHSS-like 迭代序列的吸引子. 下面我们证明 $P(\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{x}^*))<1$.

因为 $\boldsymbol{x}^*$ 为非线性方程组的解，所以有

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^*),\quad \boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^*)$$

和

$$\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x}^*)=(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*))$$
$$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}^*)=(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\beta \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*))$$

显然成立. 利用链式求导法则，我们可以得到

$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*)$$

由此，定理结果显然成立. 证毕.

下面的定理给出了 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*))<1$ 的充分条件.

定理 6.5　假设 $\boldsymbol{\Phi}: D\subset\mathbf{C}^n\rightarrow\mathbf{C}^n$ 满足定理(6.4)的条件. 引入下列记号

$$\delta=\max\{\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2,\quad \|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\|_2\}$$
$$\eta=\|(\alpha \boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2,\quad \theta(\alpha,\beta)=\|\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)\|$$

其中矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)$ 如(6.5)所定义. 若内迭代 AHSS 迭代满足收敛条件且

$$\delta<\frac{2(1-\theta(\alpha,\beta))}{\left(\frac{1}{\eta}+\eta\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{\eta}+\eta\right)^2-4(\theta(\alpha,\beta)-1)}},\tag{6.21}$$

则 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*))<1$，即 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 为非线性 AHSS-like 迭代序列的吸引子.

证明　经过计算，可以得到下面的等式

$$(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;x^*)(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}$$
$$=(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}+(\beta \boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})(\alpha \boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta \boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}+$$

(6.22)

$\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}$

因此

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*)\| = \|(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2\\
\leqslant &\|(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2+\|(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2+\\
&\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2+ \qquad (6.23)\\
&\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2\\
\leqslant &\|\boldsymbol{M}(\alpha,\beta)\|+\|(\beta\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\|_2\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2+\\
&\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\|_2\|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2+\\
&\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})^{-1}\|_2\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}\|_2\\
\leqslant &\theta(\alpha,\beta)+\frac{\delta}{\eta}+\eta\delta+\delta^2
\end{aligned}$$

利用定理中条件(6.21),我们有

$$\theta(\alpha,\beta)+\frac{\delta}{\eta}+\eta\delta+\delta^2<1$$

因此,我们有

$$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*))\leqslant\|\boldsymbol{M}(\alpha,\beta;\boldsymbol{x}^*)\|<1$$

$\boldsymbol{x}^*\in D$ 为非线性 AHSS-like 迭代序列的吸引子.

注 6.1 在证明定理 6.5 中公式(6.23)的最后一个不等式中,我们用到了 $\|(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\|_2$, $\|(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\beta\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\|_2<1$. 这是因为 AHSS 迭代收敛,$\alpha$,$\beta$ 需要在一定范围内取值,而这个范围正好保证了此式成立.

6.3.5 数值结果

为了验证 Picard-AHSS 方法和非线性 AHSS-like 迭代方法的可行性与有效性,我们考虑下面的二维非线性偏微分方程

$$\begin{cases}-(u_{xx}+u_{yy})+q(u_x+u_y)=u\cdot \mathrm{e}^u+\sin\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}, & (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$,$\partial\Omega$ 为区间 Ω 的边界. 将求解区域进行等距分割,x,y 方向步长均为 $h=\dfrac{1}{\mathrm{N}+1}$,利用迎风差分格式,可以得到下面的非线性方程组

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=0,\quad 其中\quad n=N\times N$$

在实际计算中,选取 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}$. 外 Picard 迭代停止标准取为

$$\frac{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\|_2}{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(0)})\|}\leqslant 10^{-6}$$

内 HSS 和 AHSS 迭代的停止标准取为

$$\frac{\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{s}^{(k,l_k)}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\|_2}{\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)})\|_2}\leqslant\eta_k$$

其中 l_k 表示每次 Picard 迭代使用内迭代 AHSS 的迭代步数. η_k 为强制项,用来控制内迭代求解的精确程度. 在本试验中,选取 η_k 为常数,记为 η. 对于内迭代 AHSS 迭代中出现

的两个子线性代数方程组，我们利用 LU 分解进行求解.

首先，对于不同的 N，不同的 q，我们给出 HSS 方法和 AHSS 方法中参数的值和对应谱半径的值的大小的比较. 在这两类方法中参数的选取均是使得相应谱半径上界取得最小时参数的值. 从表 6.5 中可以看出，利用 AHSS 迭代方法求解线性代数方程组(6.9)是收敛的，且迭代矩阵的谱半径明显小于 HSS 方法中系数矩阵的谱半径.

表 6.5　Picard-AHSS 和 Picard-HSS 方法中的最优参数的比较

N			8	10	12	15	20
$q=10$	Picard-HSS	α	1.4525	1.1735	0.9856	0.7956	0.6029
		$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$	0.7002	0.7486	0.7835	0.8207	0.8606
	Picard-AHSS	α	0.0930	0.0646	0.0472	0.0317	0.0122
		β	0.5800	0.3892	0.2798	0.1854	0.0706
		$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.3424	0.3652	0.3792	0.3718	0.4078
$q=20$	Picard-HSS	α	1.5370	1.2201	1.0139	0.8108	0.6097
		$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$	0.7002	0.7486	0.7835	0.8207	0.8606
	Picard-AHSS	α	0.2830	0.1951	0.1419	0.0941	0.0556
		β	0.7608	0.5156	0.3721	0.2475	0.1446
		$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.4907	0.5271	0.5504	0.5722	0.5916
$q=30$	Picard-HSS	α	1.6214	1.2666	1.0422	0.8261	0.6164
		$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$	0.7003	0.7486	0.7835	0.8207	0.8606
	Picard-AHSS	α	0.5057	0.3466	0.2511	0.1673	0.0977
		β	0.9581	0.6531	0.4732	0.3159	0.1852
		$\rho(\boldsymbol{M}(\alpha,\beta))$	0.5569	0.5997	0.6281	0.6557	0.6812

下面比较内迭代步数和 CPU 时间. 此处只给出 Picard-AHSS、Picard-HSS、非线性 HSS-like 和非线性 AHSS-like 四种方法的效率对比结果. 表 6.6～表 6.8 分别给出了四种方法内迭代数 $\mathrm{IT}_{\mathrm{int}}$、外迭代数 $\mathrm{IT}_{\mathrm{out}}$ 以及 CPU 时间的比较. 从表 6.6～表 6.8 中可以看出，与 Picard-HSS 和非线性 HSS-like 方法相比，Picard-AHSS 和非线性 AHSS-like 迭代在内、外迭代数目以及迭代时间上，都具有一定的优越性.

表 6.6　当 $\eta=0.1$，$q=10$ 时 4 种方法迭代步数和迭代时间的比较

N		8	10	12	15	20
非线性 HSS-like	IT	33	41	48	58	74
	CPU	0.9672	3.1980	8.3461	29.437	82.883
非线性 AHSS-like	IT	9	9	9	9	9
	CPU	0.3120	0.6708	1.5600	4.6176	10.249

续表

N		8	10	12	15	20
Picard-HSS	IT_{int}	31	38	45	54	70
	IT_{out}	4	4	4	4	4
	CPU	3.9312	13.026	32.745	111.17	236.28
Picard-AHSS	IT_{int}	9	9	9	9	9
	IT_{out}	4	4	4	4	3
	CPU	1.17	2.8392	6.5052	18.159	30.716

表 6.7 当 $\eta=0.1, q=20$ 时 4 种方法迭代步数和迭代时间的比较

N		8	10	12	15	20
非线性 HSS-like	IT	31	39	46	56	73
	CPU	0.9360	3.0264	8.0497	27.987	82.181
非线性 AHSS-like	IT	13	14	14	14	14
	CPU	0.4680	1.0920	2.3712	7.1136	15.725
Picard-HSS	IT_{int}	30	37	43	53	69
	IT_{out}	4	4	4	4	3
	CPU	3.9156	14.04	31.871	109.61	232.660
Picard-AHSS	IT_{int}	13	14	14	14	15
	IT_{out}	4	4	4	4	3
	CPU	1.7004	4.5240	10.343	22.854	50.295

表 6.8 当 $\eta=0.1, q=30$ 时 4 种方法迭代步数和迭代时间的比较

N		8	10	12	15	20
非线性 HSS-like	IT	29	36	44	54	71
	CPU	0.9048	7.7924	7.7376	27.097	89.903
非线性 AHSS-like	IT	16	18	19	20	20
	CPU	0.5304	1.5288	3.2916	10.171	25.241
Picard-HSS	IT_{int}	28	34	41	51	67
	IT_{out}	3	3	3	3	3
	CPU	2.8263	8.8765	23.634	82.930	227.418
Picard-AHSS	IT_{int}	3	3	3	3	20
	IT_{out}	4	4	4	4	3
	CPU	1.4508	4.1184	9.7189	34.726	66.971

6.4　一类弱非线性方程组的 Picard-MHSS 迭代方法

6.4.1　Picard-MHSS 方法及其局部收敛定理

考虑弱非线性代数方程组(6.2). 当$\boldsymbol{\Phi}: D\subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$为一个常数向量,即$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$时,非线性代数方程组(6.2)退化为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{b}\in \mathbf{C}^n \tag{6.24}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$,矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和实正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$.

修正的 HSS 迭代(MHSS)方法定义如下.

MHSS 迭代方法:给定初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in D$,对于 $l=0,1,2,\cdots$ 利用下面的格式计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$,直到满足停止条件:

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(l+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^{(l)}+\boldsymbol{b}\\(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^{(l+1)}=(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(l+\frac{1}{2})}-\mathrm{i}\boldsymbol{b}\end{cases} \tag{6.25}$$

其中 α 为给定的常数,$\boldsymbol{I}$ 为与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同阶的单位矩阵.

由于 MHSS 迭代可以改写为

$$\boldsymbol{x}^{(l+1)}=\boldsymbol{M}(\alpha)\boldsymbol{x}^{(l)}+\boldsymbol{G}(\alpha)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{M}(\alpha)^{l+1}\boldsymbol{x}^{(0)}+\sum_{j=0}^{l}\boldsymbol{M}(\alpha)^{j}\boldsymbol{G}(\alpha)\boldsymbol{b},\quad l=0,1,2,\cdots \tag{6.26}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\alpha)&=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\\\boldsymbol{G}(\alpha)&=(1-\mathrm{i})\alpha(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\end{aligned} \tag{6.27}$$

若记

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\alpha)&=\frac{1+\mathrm{i}}{2\alpha}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\\\boldsymbol{C}(\alpha)&=\frac{1+\mathrm{i}}{2\alpha}(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\end{aligned} \tag{6.28}$$

显然成立

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\alpha)-\boldsymbol{C}(\alpha)$$

经过计算,可以得到

$$\boldsymbol{M}(\alpha)=\boldsymbol{B}(\alpha)^{-1}\boldsymbol{C}(\alpha),\quad \boldsymbol{G}(\alpha)=\boldsymbol{B}(\alpha)^{-1} \tag{6.29}$$

因此,MHSS 迭代格式也可以看作是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分裂 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}(\alpha)-\boldsymbol{C}(\alpha)$得到,矩阵 $\boldsymbol{B}(\alpha)$也可以看作为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的预处理矩阵,叫做 MHSS 预处理子. 当矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$,矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和实正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$ 时,白中治等人证明了:对于任意正数 α,MHSS 方法的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha)$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha))$ 小于 1,即 MHSS 方法对于任意正数 α 和初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 均收敛到线性方程组(6.24)的精确解. 大量数值实验证明了 MHSS 方法对于求解复对称线性代数方程组是有效稳健的. 对于非线性方程组(6.2),当线性项 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 强占优于非线性项$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 时,我们可以利用 Picard 迭代

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)}),\quad k = 0,1,2,\cdots$$

计算(6.2)的解．当矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，矩阵 $\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{T}$ 分别为实正定和实正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$ 时，利用 MHSS 迭代对上述方程组进行近似求解，即利用 MHSS 迭代格式

$$\boldsymbol{B}(\alpha)\boldsymbol{x}^{(k,l+1)} = \boldsymbol{C}(\alpha)\boldsymbol{x}^{(k,l)} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)}),\quad k = 0,1,2,\cdots \tag{6.30}$$

作为 Picard 迭代的内迭代算法，这里 $\boldsymbol{B}(\alpha)$和 $\boldsymbol{C}(\alpha)$ 如式(6.28)定义，α 为给定的正常数，$\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$为一指定的正整数数列，在第 k 步 Picard 迭代时，选取内迭代初值 $\boldsymbol{x}^{(k,0)}=\boldsymbol{x}^{(k)}$，由此，我们提出一类新的方法，称为 Picard-MHSS 方法．

Picard-MHSS 迭代方法　设$\boldsymbol{\Phi}$：$D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 为一连续可微函数，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，其中矩阵 $\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$．给定初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in D$ 以及正整数序列 $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，利用下面的步骤计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，直到近似解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 达到给定精度．

① 设 $\boldsymbol{x}^{(k,0)}:=\boldsymbol{x}^{(k)}$；

② 对于 $l=0,1,2,\cdots,l_k-1$，求解下述线性方程组得到 $\boldsymbol{x}^{(k,l+1)}$：

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(k,l+\frac{1}{2})} = (\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^{(k,l)} + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)})\\ (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^{(k,l+1)} = (\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(k,l+\frac{1}{2})} - \mathrm{i}\,\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)})\end{cases} \tag{6.31}$$

其中 α 为一给定的正常数．

③ 令 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}:=\boldsymbol{x}^{(k,l_k)}$．

注 6.2　由上述算法可知，Picard-MHSS 方法一方面保持了 Picard-HSS 方法中的优点，不需要在当前迭代步 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 处计算和存储 Jacobi 矩阵，且在所有内迭代过程中，出现的两个子线性方程组的系数矩阵均为常数矩阵，另一方面，又避免了在内迭代过程中出现系数矩阵为复矩阵 $\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$ 的线性代数方程组．

下面，我们分析 Picard-MHSS 方法的局部收敛性质．首先引入下面的定义．对于任意的向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^n$ 和矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，我们定义向量范数及其诱导范数

$$\|\boldsymbol{x}\| \stackrel{\text{def}}{=\!=} \|(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}\|_2,\qquad \|\boldsymbol{X}\| \stackrel{\text{def}}{=\!=} \|(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{X}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|$$

可以得到下述局部收敛定理：

定理 6.6　设 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 是非线性方程组(6.2)的解．$\boldsymbol{\Phi}$：$D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$在点 $\boldsymbol{x}^*$ 的开邻域 $N_0\in D$ 上 G 可导且$\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)$连续．假设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$．矩阵 $\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{T}$ 分别为实正定和正半定矩阵．记

$$\theta(\alpha) = \|\boldsymbol{M}(\alpha)\|,\quad \mu = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|,\quad \beta = \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)\|$$

若 $\beta<1$，$l_0\geqslant\left\lfloor \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\Big/\ln(\theta(\alpha))\right\rfloor$，则存在 $\boldsymbol{x}^*$ 的一个开邻域 $N\subset N_0$，使得对于任何初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in N$ 和任何正整数序列 l_k，$k=0,1,2,\cdots$，由 Picard-MHSS 迭代方法生成的序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$总是适定的且收敛于非线性方程组的解 $\boldsymbol{x}^*$．除此之外，有下式成立：

$$\limsup_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*\|^{\frac{1}{k}} \leqslant \beta+(1+\beta)\theta(\alpha)^{l_0}$$

其中 $l_0=\liminf\limits_{k\to\infty} l_k$．特别地，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} l_k=\infty$，那么迭代序列的收敛率为 R 线性收敛的，且 R

收敛因子至多为 β，即 $\limsup\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|^{\frac{1}{k}}\leqslant\beta$.

证明：由 Picard-MHSS 迭代格式(6.31)，经计算可以得到

$$x^{(k+1)}=M(\alpha)^{l_k}x^{(k)}+\sum_{j=0}^{l_k-1}M(\alpha)^jG(\alpha)\boldsymbol{\Phi}(x^{(k)}),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{6.32}$$

其中 $M(\alpha)$ 和 $G(\alpha)$ 由(6.29)定义. 由于 $x^*\in D$ 为 $F(x)=\mathbf{0}$ 的解，故有

$$x^*=M(\alpha)^{l_k}x^*+\sum_{j=0}^{l_k-1}M(\alpha)^jG(\alpha)\boldsymbol{\Phi}(x^*),\quad k=0,1,2,\cdots \tag{6.33}$$

式(6.32)减去式(6.33)，我们得到

$$x^{(k+1)}-x^*=M(\alpha)^{l_k}(x^{(k)}-x^*)+\sum_{j=0}^{l_k-1}M(\alpha)^jG(\alpha)[\boldsymbol{\Phi}(x^{(k)})-\boldsymbol{\Phi}(x^*)],\quad k=0,1,2,\cdots \tag{6.34}$$

记

$$E(x,x^*)\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{\Phi}(x)-\boldsymbol{\Phi}(x^*)-\boldsymbol{\Phi}'(x^*)(x-x^*)$$

则式(6.34)可以等价地写成

$$\begin{aligned}
&x^{(k+1)}-x^*\\
&=\Big[M(\alpha)^{l_k}+\sum_{j=0}^{l_k-1}M(\alpha)^jG(\alpha)\boldsymbol{\Phi}'(x^*)\Big](x^{(k)}-x^*)+\sum_{j=0}^{l_k-1}M(\alpha)^jG(\alpha)E(x^{(k)},x^*)\\
&=[M(\alpha)^{l_k}+(I-M(\alpha)^{l_k})A^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(x^*)](x^{(k)}-x^*)+(I-M(\alpha)^{l_k})A^{-1}E(x^{(k)},x^*)\\
&=[A^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(x^*)+M(\alpha)^{l_k}(I-A^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(x^*))](x^{(k)}-x^*)+(I-M(\alpha)^{l_k})A^{-1}E(x^{(k)},x^*)
\end{aligned} \tag{6.35}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\|x^{(k+1)}-x^*\|\leqslant[\|A^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(x^*)\|+\|M(\alpha)^{l_k}\|(I+\|A^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(x^*)\|)]\|x^{(k)}-x^*\|+\\
&(1+\|M(\alpha)\|^{l_k})\|A^{-1}\|\|E(x^{(k)},x^*)\|\\
&=[\beta+(1+\beta)\theta(\alpha)^{l_k}]\|x^{(k)}-x^*\|+\mu(1+\theta(\alpha)^{l_k})\|E(x^{(k)},x^*)\|
\end{aligned} \tag{6.36}$$

由函数 $\boldsymbol{\Phi}:D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 在 $x^*\in D$ 的某个开邻域 $N_0\in D$ 内 G 可导和 $\boldsymbol{\Phi}'$ 在 $x^*\in D$ 处连续可以得出对于任意给定的 $\varepsilon>0$，对于所有的 $x\in N$，都存在 x^* 的一个开邻域 $N\subset N_0$，使得

$$\|E(x,x^*)\|<\varepsilon\|x-x^*\|$$

由已知条件 $\beta<1$，$l_0\geqslant\left\lfloor\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\Big/\ln(\theta(\alpha))\right\rfloor$ 可知

$$\beta+(1+\beta)\theta(\alpha)^{l_0}<1$$

进一步假设 ε 满足

$$\beta+(1+\beta)\theta(\alpha)^{l_0}+\mu(1+\theta(\alpha)^{l_0})\varepsilon<1$$

则当 $x_0\in N$ 并且 $l_0=\liminf\limits_{k\to\infty}l_k$ 时，根据式(6.36)，利用数学归纳法，我们立刻得到

$$\|E(x^{(k)},x^*)\|<\varepsilon\|x^{(k)}-x^*\|$$

$$\|x^{(k+1)}-x^*\|\leqslant[\beta+(1+\beta)\theta(\alpha)^{l_0}+\mu(1+\theta(\alpha)^{l_0})\varepsilon]\|x^{(k)}-x^*\| \tag{6.37}$$

并且对于所有的 $k=0,1,2,\cdots$ 都有 $x^{(k)}\in N$ 成立. 由式(6.36)和式(6.37)可以得到

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$$

和

$$\limsup_{k\to\infty} \| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{*} \|^{\frac{1}{k}} \leqslant \beta + (1+\beta)\theta(\alpha)^{l_0} + \mu(1+\theta(\alpha)^{l_0})\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性和 R 收敛因子范数独立可知，由 Picard-MHSS 迭代所产生的序列 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 的 R 收敛因子至多为 $(1+\beta)\theta(\alpha)^{l_0}$. 另外，若 $\lim\limits_{k\to\infty} l_k=\infty$，由式(6.37)可知，序列 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 是 R 线性收敛的且 R 收敛因子至多为 β.

定理 6.6 表明 Picard-MHSS 迭代的收敛速率实质上由 β 和 $\theta(\alpha)$ 决定. 通常，β 和 $\theta(\alpha)$ 越小，Picard-MHSS 迭代的收敛速率越快. 当弱非线性方程组中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为病态时，$\theta(\alpha)$ 接近于 1，Picard-MHSS 迭代的收敛速率会变得非常慢以至于内迭代步数很多. 在这种情况下，可以考虑使用预处理的 MHSS(PMHSS)迭代代替，这样会使得 $\theta(\alpha)$ 小一些，不精确的 Picard 迭代的收敛速率更快一些.

本节最后，为了方便数值计算，将 Picard-MHSS 迭代写成下面等价的残量校正形式.

Picard-MHSS 迭代残量校正形式：设 $\boldsymbol{\Phi}: D\subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 为一连续可微函数，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，其中矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$. 给定初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in D$ 以及正整数序列 $\{l_k\}_{k=0}^{\infty}$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，利用下面的步骤计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，直到近似解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 达到给定精度.

① 设 $\boldsymbol{s}^{(k,0)}:=\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}^{(k)}:=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)})-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(k)}$

② 对于 $l=0,1,2,\cdots,l_k-1$，求解下述线性方程组得到 $\boldsymbol{s}^{(k,l+1)}$：

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{s}^{(k,l+\frac{1}{2})} = (\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{s}^{(k,l)}+\boldsymbol{b}^{(k)} \\ (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{s}^{(k,l+1)} = (\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{s}^{(k,l+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{b}^{(k)}\end{cases} \tag{6.38}$$

③ 令 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}:=\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{s}^{(k,l_k)}$.

6.4.2 非线性 MHSS-like 迭代方法及其收敛定理

在 Picard-MHSS 算法中，内迭代数 $l_k,k=0,1,2,\cdots$ 通常依赖于所考虑的线性方程组，在数值计算中很难决定其大小，为了避免使用显式的内迭代过程，但是仍然保持 Picard-MHSS 方法的优点，基于非线性固定点方程

$$(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{x} = (\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \quad 和 \quad (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x} = (\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$$

我们提出下面的非线性 MHSS-like 迭代方法.

非线性 MHSS-like 迭代方法：给定初始估计 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in D$，利用下面的步骤计算 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，直到近似解 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 达到给定精度.

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})} = (\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)}) \\ (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})})\end{cases} \tag{6.39}$$

这里，α 为给定的常数，$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵. 下面给出非线性 MHSS-like 迭代方法的局部收敛定理.

定理 6.7 设 $\boldsymbol{x}^{*}$ 为非线性方程组(6.2)的解，$\boldsymbol{\Phi}: D\subset\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 在 $\boldsymbol{x}^{*}$ 处 F 可导，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{W}+\mathrm{i}\boldsymbol{T}$，其中矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}$ 分别为实正定矩阵和正半定矩阵且满足 $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{W},\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}$.

记 $\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^{*}) = (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^{*}))(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^{*}))$

如果 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*))<1$，则 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 为非线性 MHSS-like 迭代的一个吸引子.

证明：首先，定义函数

$$\begin{cases}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}((\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}))\\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}((\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}))\end{cases}\tag{6.40}$$

和

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{V}\circ\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}))$$

则非线性 MHSS-like 迭代格式(6.39)等价于

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}^{(k)}),\quad k=0,1,2,\cdots$$

由 Ostrowski 定理可知，如果 $\rho(\boldsymbol{\Psi}'(x^*))<1$，那么 $\boldsymbol{x}^*$ 为非线性 MHSS-like 迭代序列的吸引子. 因此，下面我们证明 $\rho(\boldsymbol{\Psi}'(x^*))<1$. 因为 $\boldsymbol{x}^*$ 为非线性方程组的解，所以有

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^*),\quad \boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^*)$$

和

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}^*)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}((\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^*))$$
$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^*)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}((\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})x^*-\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^*))$$

显然成立. 利用链式求导法则，我们可以得到

$$\boldsymbol{\Psi}'(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{U}'(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*)$$

由此，定理结果显然成立. 证毕.

下面的定理给出了 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*))<1$ 的充分条件.

定理 6.8　假设 $\boldsymbol{\Phi}:D\subset\mathbf{C}^n\rightarrow\mathbf{C}^n$ 满足定理 6.7 的条件. 引入下列记号

$$\delta=\max\{\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\|_2,\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2\},\quad \theta(\alpha)=\|\boldsymbol{M}(\alpha)\|_2$$

其中矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha)$ 如(6.27)所定义. 若

$$\delta<-1+\sqrt{2-\theta(\alpha)}\tag{6.41}$$

则 $\rho(\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*))<1$，即 $\boldsymbol{x}^*\in D$ 为非线性 MHSS-like 迭代序列的吸引子.

证明：经过计算可以得到下面的等式

$$\begin{aligned}&(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\\ &=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{M}(\alpha)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}+(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}-\\ &\quad\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}-\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\end{aligned}\tag{6.42}$$

两边同时取范数，得到

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*)\|=\|(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{M}(\alpha;\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2\\ \leqslant&\|(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})\boldsymbol{M}(\alpha)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2\;\|(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2+\\ &\|\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2+\\ &\|\mathrm{i}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2\\ \leqslant&\|\boldsymbol{M}(\alpha)\|+\|(\alpha\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\boldsymbol{W})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\|_2\;\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2+\\ &\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\|_2\;\|(\alpha\boldsymbol{I}-\mathrm{i}\boldsymbol{T})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2+\\ &\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W})^{-1}\|_2\;\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{T})^{-1}\|_2\\ \leqslant&\theta(\alpha)+2\delta+\delta^2\end{aligned}\tag{6.43}$$

事实上，在上面的证明过程中我们利用了

$$\|(\alpha I+\mathrm{i}W)(\alpha I+W)^{-1}\|_2<1,\quad \|(\alpha I-\mathrm{i}T)(\alpha I+T)^{-1}\|_2<1,$$

利用定理中条件(6.41),我们有

$$\theta(\alpha)+2\delta+\delta^2<1$$

因此,我们有

$$\rho(M(\alpha;x^*))\leqslant\|M(\alpha;x^*)\|<1$$

$x^*\in D$ 为非线性 MHSS-like 迭代序列的吸引子.

6.4.3 数值结果

为了验证 Picard-MHSS 方法的可行性与有效性,我们考虑下面的二维非线性方程

$$\begin{cases}-(\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1)(u_{xx}+u_{yy})+\rho u=(\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2)ue^u+\sin\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}, & (x,y)\in\Omega\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial\Omega\end{cases}$$

其中 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$,$\partial\Omega$ 为区域 Ω 的边界,ρ 为正常数. 取系数 $\alpha_1=\beta_1=1$,$\alpha_2=\beta_2=0.5$. 在等分布网格上应用中心差分格式 $h=\dfrac{1}{N+1}$,可以得到下面的非线性方程组

$$F(x)\equiv Ax-\Phi(x)=0,\quad 其中\quad n=N\times N$$

在我们的计算中,选取 $x^{(0)}=\mathbf{0}$,外 Picard 迭代停止标准取为

$$\frac{\|F(x^{(k)})\|_2}{\|F(x^{(0)})\|_2}\leqslant 10^{-6}$$

内 HSS 和 MHSS 迭代的停止标准都取为

$$\frac{\|F'(x^{(k)})s^{(k,l_k)}+F(x^{(k)})\|_2}{\|F(x^{(k)})\|_2}\leqslant\eta_k$$

由于 Picard-HSS 与 Newton-HSS、Newton-GMRES 等方法的效率已经在相关文献中进行了详细的对比,此处只给出 Picard-MHSS、Picard-HSS、非线性 HSS-like 和非线性 MHSS-like 四种方法的效率对比结果. 在内迭代 MHSS 和 HSS 中,我们利用 LU 分解来求解方法中的子线性系统. 除此之外,选取 η_k 为常数,记为 η. 选择不同的 n 值,不同的 ρ 值以及不同的内迭代停止标准,利用 4 种方法分别求解非线性方程组. 表 6.9 和表 6.10 分别给出了 Picard-MHSS 和 Picard-HSS 两种方法中最优参数的值,从表格中可以看出,两种方法中最优参数的值完全一致.

表 6.9 Picard-MHSS 方法的最优参数 α

N	$\rho=1$	$\rho=10$	$\rho=50$	$\rho=100$
10	1.1559	1.3921	2.1789	2.9265
15	0.8004	0.9607	1.4865	1.9714
20	0.6112	0.7330	1.1293	1.4903
25	0.4924	0.5924	0.9108	1.1991

表 6.10　Picard-HSS 方法的最优参数 α

N	$\rho=1$	$\rho=10$	$\rho=50$	$\rho=100$
10	1.1559	1.3921	2.1789	2.9265
15	0.8004	0.9607	1.4865	1.9714
20	0.6112	0.7330	1.1293	1.4903
25	0.4924	0.5924	0.9108	1.1991

表 6.11 和表 6.13 分别给出了 4 种方法内迭代步数 IT_{int}、外迭代步数 IT_{out} 的比较，表 6.12 和表 6.14 给出了 4 种方法 CPU 时间的比较. 从表格中可以看出，与 Picard-HSS 和非线性 HSS-like 方法相比，Picard-MHSS 和非线性 MHSS-like 迭代在内、外迭代数目上相差不多，但是在迭代时间上随着求解规模 n 的不断增加，Picard-MHSS 和非线性 MHSS-like 的求解时间有了很大程度的减少.

表 6.11　当 $\eta=0.1$ 时 4 种方法迭代步数的比较

N			5	10	12	15
$\rho=1$	非线性 HSS-like	IT	25	46	55	70
	非线性 MHSS-like	IT	30	49	56	68
	Picard-HSS	IT_{int}	24	41	45	57
		IT_{out}	6	7	7	8
	Picard-MHSS	IT_{int}	31	48	55	64
		IT_{out}	6	7	7	8
$\rho=10$	非线性 HSS-like	IT	25	48	43	54
	非线性 MHSS-like	IT	30	36	55	65
	Picard-HSS	IT_{int}	20	34	38	56
		IT_{out}	6	7	7	7
	Picard-MHSS	IT_{int}	31	47	39	53
		IT_{out}	6	7	7	7

表 6.12　当 $\eta=0.1$ 时 4 种方法迭代时间的比较

N		5	10	12	15
$\rho=1$	非线性 HSS-like	0.1092	4.7112	13.400	49.874
	非线性 MHSS-like	0.1404	3.8680	10.639	35.116
	Picard-HSS	1.2324	28.267	74.865	318.68
	Picard-MHSS	0.7020	17.597	57.05	258.32

续表

N		5	10	12	15
$\rho=10$	非线性 HSS-like	0.1092	3.8220	10.546	39.094
	非线性 MHSS-like	0.1248	2.5100	8.1560	33.431
	Picard-HSS	1.0140	23.931	62.619	250.68
	Picard-MHSS	0.7020	13.712	46.301	197.69

表 6.13 当$\eta=0.01$ 时 4 种方法迭代步数的比较

N			5	10	12	15
$\rho=1$	非线性 HSS-like	IT	25	46	55	70
	非线性 MHSS-like	IT	30	49	56	68
	Picard-HSS	IT_{int}	28	47	56	67
		IT_{out}	6	7	8	8
	Picard-MHSS	IT_{int}	36	55	63	75
		IT_{out}	6	7	7	7
$\rho=10$	非线性 HSS-like	IT	25	48	43	54
	非线性 MHSS-like	IT	30	36	55	65
	Picard-HSS	IT_{int}	24	40	46	58
		IT_{out}	6	7	7	7
	Picard-MHSS	IT_{int}	36	55	63	66
		IT_{out}	6	7	7	7

表 6.14 当$\eta=0.01$ 时 4 种方法迭代时间的比较

N		5	10	12	15
$\rho=1$	非线性 HSS-like	0.1092	4.7112	13.400	49.874
	非线性 MHSS-like	0.1404	3.8680	10.639	35.116
	Picard-HSS	1.2948	32.339	102.02	381.98
	Picard-MHSS	0.8424	28.077	76.968	300.145
$\rho=10$	非线性 HSS-like	0.1092	3.8220	10.546	39.094
	非线性 MHSS-like	0.1248	2.5100	8.1560	33.431
	Picard-HSS	1.0608	26.599	89.270	279.76
	Picard-MHSS	0.8241	22.718	78.440	214.09

参 考 文 献

[1] Arany I. The preconditioned conjugate gradient method with incomplete factorization preconditioners[J]. Comput Math Appl,(1996),31：1-5.

[2] Sherman A H. On Newton-iterative methods for the solution of systems of nonlinear equations[J]. SIAM J. Numer. Anal.(1978),15(4)：755-771.

[3] Greenbaum A. Iterative methods for solving linear systems[M]. SIAM,1987.

[4] Axelsson O. A survey of preconditioned iterative methods for linear systems of algebraic equations [J]. BIT Numer. Math.(1985),25(1)：165-187.

[5] Axelsson O. Iterative solution methods[M]. Cambridge：Cambridge Univ. Press,1994.

[6] Axelsson O, Bai Z-Z, Qiu S-X. A class of nested iteration schemes for linear systems with a coefficient matrix with a dominant positive definite symmetric part[J]. Numer. Algor.(2004),35：351-372.

[7] Bai Z-Z, Golub G H , Li C-K. Convergence properties of preconditioned hermitian and skew hermitian splitting methods for non-hermitian positive semidefinite matrices[J]. Math. Comput. (2007),76：287-298.

[8] Bai Z-Z,Golub G H, Lu L-Z, et al. Block triangular and skew-hermitian splitting methods for positive definite linear systems[J]. SIAM J. Sci. Comput.(2005),26：844-863.

[9] Bai Z-Z, Golub G H, Ng M K. On successive overrelaxation acceleration of the hermitian and skew-hermitian splitting iterations[J]. Numer. Lin. Alg. Appl.(2007),14：319-335.

[10] Bai Z-Z, Golub G H, Ng M K. Hermitian and skew-hermitian splitting methods for non? hermitian positive definite linear systems[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl.(2003),24(3)：603-626.

[11] Bai Z-Z, Golub G H,Pan J-Y. Preconditioned hermitian and skew-hermitian splitting methods for non-hermitian positive semidefinite linear systems[J]. Numer. Math.(2004),98：1-32.

[12] Bai Z-Z,Guo X-P. On Newton-HSS methods for systems of nonlinear equations with positive-difinite Jacobian matrices[J]. J. Comp. Math.(2010),28：235-260.

[13] Benzi M. Preconditioning techniques for large linear systems：A survey[J]. J. Comput. Phys. (2002),182：418-477.

[14] Brezinski C. Multiparameter descent methods[J]. Lin. Alg. Appl.(1999),296：113-141.

[15] Brezinski C. Variations on Richardson's method and acceleration[J]. In Numerical Analysis：A Numerical Analysis Conference in Honour of Jean Meinguet,Bull. Soc. Math. Belg. ,(1996)：33-44.

[16] Brezinski C. Block descent methods and hybrid procedures for linear systems[J]. Numer. Algor. (2002),29：21-32.

[17] Brezinski C. Acceleration procedures for matrix iterative methods[J]. Numer. Algor.(2000),25：63-73.

[18] Brezinski C,Chehab J-P. Nonlinear hybrid procedures and fixed point iterations[J]. Numer. Funct. Anal. and Optim.(1998),19：465-487.

[19] Brezinski C,Chehab J-P. Multiparameter iterative schemes for the solution of systems of linear

and nonlinear equations[J]. SIAM J. Sci. Comput. (1999), 98: 2140-2159.
[20] Brezinski C, Chehab J-P. Multiparameter descent methods[J]. Lin. Alg. Appl. (1999): 296.
[21] Brown P N. A local convergence theory for combined inexact Newton/ finite-difference projection methods[J]. SIAM J. Numer. Anal. (1987), 24: 407-434.
[22] Brown P N, Saad Y. Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations[J]. SIAM J. Sci. Stat. Comput. (1990), 11: 450-481.
[23] Brown P N, Saad Y. Globally convergent techniques in nonlinear Newton-Krylov algorithms[J]. WSSIAA2, (1989): 151-164.
[24] Brown P N, Saad Y. Convergence theory of nonlinear Newton-Krylov algorithms[J]. SIAM J. Optim. (1994), 4: 297-330.
[25] Cai X-C, Keyes D E. Nonlinearly precondition inexact Newton methods[J]. SIAM J. Sci. Comput. (2002), 24(1): 183-200.
[26] Chehab J-P. A nonlinear adaptive multiresolution method in finite differences with incremental unknowns, RAIRO Model[J]. Math. Anal. Numer. (1995), 29(4): 451-475.
[27] Chehab J-P. Solution of generalized Stokes problems using hierarchical methods and incremental unknowns[J]. Appl. Numer. Math. (1996), 21(1): 9-42.
[28] Chehab J-P. Matrix differential equations and inverse preconditioners[J]. Comput. Appl. Math. (2007), 26: 95-128.
[29] Chehab J-P. Incremental unknowns method and compact schemes[J]. Math. Model. Numer. Anal. (1998), 32: 51-83.
[30] Chehab J-P, Costa B. Time explicit schemes and spatial finite differences splittings[J]. J. Sci. Comput. (2004), 20: 159-188.
[31] Chehab J-P, Costa B. Multiparameter schemes for evolutionary equations[J]. Numer. Algor. (2003), 34: 245-257.
[32] Chehab J-P, Miranville A. Incremental unknowns on nonuniform meshes[J]. Math. Model. Numer. Anal. (1998), 32: 539-577.
[33] Chehab J-P, Raydan M. Inverse and adaptive preconditioned gradient methods for nonlinear problems[J]. Appl. Numer. Math. (2005), 55: 32-47.
[34] Chehab J P, Teman R. Incremental unknowns for solving nonlinear eigenvalue problems: New multiresolution methods[J]. Numer. Meth. Part. Diff. Equ. (1995), 11(3): 199-228.
[35] 陈景良,陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京:清华大学出版社,2000.
[36] Chen M, Miranville A, Temam R. The incremental unknowns in finite differences in three space dimensions[J]. Comput. Appl. Math. (1995), 14(3): 1-15.
[37] Chen M, Temam R. The incremental unknown method I[J]. Appl. Math. Lett. (1991), 4(3): 73-76.
[38] Chen M, Temam R. The incremental unknown method II[J]. Appl. Math. Lett. (1991), 4(3): 77-80.
[39] Chen M, Temam R. nonlinear Galerkin mehtod with multilevel incremental unknowns[J]. Contributions in Numerical Mathematics, WSSIAA2, (1993): 151-164.
[40] Chen M, Temam R. Nonlinear Galerkin method in the finite difference case and wavelet-like incremental unknowns[J]. Numer. Math. (1993), 64: 271-294.
[41] Chen M, Temam R. Incremental unknowns for convection-eiffusion equations[J]. Appl. Numer.

Math. (1993), 11: 365-383.

[42] Chen M, Temam R. Incremental unknowns in finite differences: Condition number of the matrix [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl. (1993), 14(2): 432-455.

[43] Chen M, Temam R, Incremental unknowns for solving partial differential equations[J]. Numer. Math. (1991), 59(3): 255-271.

[44] Dembo R S, Eisenstat S C, T. Steihaug, inexact Newton methods[J]. SIAM J. Numer. Anal. (1982), 19: 400-408.

[45] Deulflhard P, Newton methods for the nonlinear problems: Affine invariance and adaptive algorithms[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[46] Dubois T, Jauberteau F, Temam R. Incremental unknowns, multilevel methods and the numerical simulation of turbulence[J]. Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. (1998), 159: 123-189.

[47] Eisenstat S C, Walker H F. Globally convergent inexact Newton methods[J]. SIAM J. Optim. (1994), 4: 393-422.

[48] Eisenstat S C, Walker H F. Choosing the forcing terms in an inexact Newton methods[J]. SIAM J. Sci. Comput. (1996), 17(1): 16-32.

[49] Eden A, Michaux B, Rakotoson J M. Doubly nonlinear parabolic-type equations as dynamical systems[J]. J. Dyna. Diff. Equ. (1991), 3: 87-129.

[50] Eden A, Michaux B, Rakotoson J M. Semi-discretized nonlinear evolution equations as discrete dynamical systems and error analysis[J]. J. Indiana Univ. Math. (1990), 39: 737-783.

[51] Evans D J, Preconditioning methods: Analysis and applications, Gordon and Breach Science, 1983.

[52] Ewinga R E, Ilievb O P, Margenovc S D, et al. Numerical study of three multilevel preconditioners for solving 2D unsteady Navier-Stokes equations, Comput. Meth. Appl. Mech. Engin. (1995), 121: 177-186.

[53] 冯果忱,刘经伦. 数值代数[M]. 长春:吉林大学出版社,1991.

[54] Foias C, Manley O, Temam R. On the interaction of small and large eddies in 2D turbulent flow [J]. Math. Model. Numer. Anal. (1988), 22: 93-114.

[55] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations[J]. J. Diff. Equ. (1998), 73: 309-353.

[56] Garcia S. Algebraic conditioning analysis of the incremental unknwons preconditioner[J]. Appl. Math. Model. (1998), 22(4-5): 351-366.

[57] Garcia S. Incremental unknowns and graph techniques in three space dimensions [J]. Appl. Numer. Math. (2003), 44(3): 329-365.

[58] Garcia S. Incremental unknowns for solving the incompressible Navier-Stokes equations [J]. Math. Comp. Simu. (2000), 52: 445-489.

[59] Garcia S. Numerical study of the incremental unknowns method, Numer. Meth. Part. Diff. Equ. (1994), 10(1): 103-127.

[60] Garcia S. Higher-order incremental unknowns, hierarchical basis and nonlinear dissipative evolutionary equations, Appl. Numer. Math. (1996), 19: 467-494.

[61] Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations. Baltimore: The John Hopkins University Press, 1989.

[62] 郭本瑜. 偏微分方程的差分方法[M]. 北京:科学出版社,1988.

[63] Huhtanen M, Nevanlinna O. Minimal decompositions and iterative methods[J]. Numer. Math.

(2000), 86: 257-281.

[64] Huang J-Q, Wu Y-J. On stability and error estimates for a class of weighted semi-implicit schemes of incremental unknowns methods [J]. Math. Numer. Sin. (Chinese Series) 2005, 27 (2): 183-198.

[65] Larsson S, Thomee V, Partial differential equations with numerical methods [J]. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2003.

[66] Lee J, Zhang J, Lu C-C. Incomplete LU preconditioning for large scale dense complex linear systems from electromagnetic wave scattering problems [J]. Comput. Phys. (2003), 185: 158-175.

[67] 李庆扬,莫孜中,祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京:科学出版社,1999.

[68] 马富明,常玉堂. 数值逼近[M]. 长春:吉林大学出版社,2000.

[69] Marshall A W, Olkin I. Matrix versions of the cauchy and kantorovich inequalities [J]. Aequationes Math. (1990), 40: 89-93.

[70] Miranville A, Muresan A C. Block incremental unknowns for anisotropic elliptic equations [J]. Appl. Numer. Math. (2002), 42: 529-543.

[71] Niki H, Harada K, Morimoto M, Sakakihara M. The survey of preconditioners used for accelerating the rate of convergence in the Gauss-Seidelmethod [J]. J. Comput. Appl. Math. (2004), 164-165: 587-600.

[72] Ortega J M, Rheinboldt W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables [J]. New York and London: Academic Press, 1970.

[73] Poullet P, Boag A. Incremental unknowns preconditioning for solving the helmholtz equation [J]. Numer. Meth. Part. Diff. Equ. (2007), 23(6): 1396-1410.

[74] Poullet F. Stability study, error estimation and condition number for semi-implicit schemes using incremental unknowns [J]. Numer. Meth. Part. Diff. Equ. (1996), 12: 743-766.

[75] Poullet P. Staggered incremental unknowns for solving Stokes and generalized Stokes problems [J]. Appl. Numer. Math. (2000), 35(1): 23-41.

[76] Quarteroni A, Valli A. Numerical approximation of partial differential equations [J]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[77] Saad Y. Preconditioning techniques for nonsymmetric and indefinite linear systems [J]. J. Comput. Appl. Math. (1988), 24: 89-105.

[78] Saad Y. Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems [J]. Math. Comput. (1981), 37: 105-126.

[79] Saad Y. Schultz M H, GMRES: A generalized minimal residual method for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM. Sci. Stat. Comput. (1986), 7: 856-869.

[80] Saad Y, Havd V. Iterative solution of linear systems in the 20th century [J]. J. Comput. Appl. Math. (2000), 123: 1-33.

[81] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.

[82] Song L-J, Wu Y-J. Incremental unknowns method for solving three dimensional convection diffusion equations [J]. Numer. Math. J. Chinese Univ. (English Ser.) (2007), 16: 14-27.

[83] Song L-J, Wu Y-J. Incremental unknowns in three dimensional stationary problem [J]. Numer. Algor. (2007), 46: 153-171.

[84] Song L-J. Incremental unknowns and wavelet-like incremental unknowns methods applied in PDEs

[D]. Lanzhou: Lanzhou University,2009.

[85] Tachim M T. Numerical solutions of the Navier-Stokes equations using wavelet-like incremental unknowns,RAIRO Model[J]. Math. Anal. Numer. (1997),31(7): 827-844.

[86] Temam R. Incremental unknowns in finite differences, Algor. Tren. Comput. Fluid Dynam., (1991): 85-106.

[87] Temam R. Inertial manifolds and multigrid methods,SIAM J. Math. Anal. (1990),21: 154-178.

[88] Temam R. Numerical analysis[M]. Reidel,Dordrecht,1973.

[89] Thomas J W. Numerical partial differential equations: Finite difference methods[M]. New York: Springer-Verlag,1995.

[90] Tismenetsky M. A new preconditioning technique for solving large sparse linear systems[J]. Lin. Alg. Appl. (1991),331: 154-156.

[91] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. New York and London: Springer,2000.

[92] Van H A Vorst der. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems[J]. SIAM J. Sci. Stat. Comput. (1992),13(2): 631-644.

[93] Wang C-L,Bai Z-Z. Sufficient conditions for the convergent splittings of non-hermitian positive definite matrices[J]. Lin. Alg. Appl. (2001),330: 215-218.

[94] 王烈衡,许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 北京:科学出版社,2003.

[95] Widlund O. A Lanczos method for a class of nonsymmetric systems oflinear equation[J]. SIAM J. Numer. Anal. (1978),15: 801-812.

[96] Wu Y-J,Wang Yang, M.-L. Zeng, A.-L. Yang. Implementation of modified Marder-Weitzner method for solving nonlinear eigenvalue problems[J]. J. Comput. Appl. Math. (2009),226: 166-176.

[97] Wu Y-J, Jia X-X, She A-L. Semi-implicit schemes with multilevel wavelet-like incremental unknowns for solving reaction diffusion equation[J]. Hokkaido Math. J. (2007),36: 711-728.

[98] Wu Y-J,Yang A-L. Incremental unknowns for the heat equation with time-dependent coefficients: semi-implicit θ-schemes and their stability[J]. J. Comput. Math. (2007),25(5): 573-582.

[99] Yang A-L, Jing An, Y-J Wu. A generalized preconditioned HSS method for non-Hermitian positive defenite linear systems[J]. Appl. Math. Comput.,(2010),216: 1715-1722.

[100] Yang A-L,Wu Y-J. Wavelet-like block incremental unknowns for anisotropic parabolic equations [J]. Proceedings of the 2009 WRI World Congress on Computer Science and information Engineering. (2009),2: 550-554.

[101] Young D M. Iterative solution of large linear systems[M]. New York: Academic Press,1971.

[102] Ypma T J. Local convergence of inexact Newton methods,SIAM J. Numer. Anal.

[103] 余德浩,汤华中. 微分方程数值解[M]. 北京:科学出版社,2003.

[104] Zhang J,Sparse approximate inverse and multilevel block ILU preconditioning techniques for general sparse matrices,Appl. Numer. Math. (2000),35: 67-86.

[105] 杨爱利. 偏微分方程数值计算及增量未知元方法研究[D]. 兰州:兰州大学,2008.

[106] 谷同祥,徐小文等. 迭代方法和预处理技术[M]. 北京:科学技术出版社,2015.

[107] Chen K. Matrix Preconditioning techniques and applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press,2005.

[108] LiLiang, Huang T Z,Liu X P. Asymmetric Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for

positive definite linear systems[J]. Comput Math Appl. ,(2007),54: 147-159.

[109] 王洋,伍渝江,范晓燕. 非 Hermite 正定线性代数方程组的两参数预处理 NSS 方法[J]. 应用数学与计算数学学报,(2013),27(3): 322-340.

[110] Li Liang, Huang Tingzhu, Liu Xingping. Modified Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive-definite liner systems[J]. Numerical Linear Algebra with Applications,(2007),14: 217-235.

[111] 杨爱利,伍渝江等. 一类非线性方程组的 Newton-PSS 迭代法[J]. 计算数学,(2012),34(4): 329-340.

[112] 王洋. Newton-LHSS 后退方法及其全局收敛性的研究[J]. 河南大学学报,(2012),6: 694-698.

[113] Bai Zhongzhi, Benzi M, Chen Fang, Modified HSS iteration methods for a class of complex symmetric linear systems[J]. Computing,(2010),87(3-4): 93-111.

[114] Bai Zhongzhi, Benzi M, Chen Fang. On preconditioned MHSS iteration methods complex symmetric linear systems[J]. Numerical Algorithms,(2011),56(2): 297-317.

[115] Guo X P, Duff I S, Semilocal and global convergence of the Newton-HSS method for systems of nonlinear equations[J]. Numer. Linear Algebra Appl. (2011),18(3): 299-315.

[116] Bai Z Z, Yang X. On HSS-based iteration methods for weakly nonlinear systems[J]. Appl. Numer. Math. ,(2009),59(12): 2923-2936.

[117] 李旭. 若干线性与非线性方程组及一类连续 Sylvester 方程的基于 HSS 的迭代方法与加速技巧研究[D]. 兰州: 兰州大学,2013.

[118] 谢和虎. 非线性特征值问题的多重网格算法[J]. 中国科学: 数学,2015,45(8): 1193-1204.

[119] 李长伟,卢琳璋. 求解非线性特征值问题的两种迭代投影法[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2011,50(4): 669-673.

[120] Bolley C, Multiple solutions of a bifurcation problem, in: C. Bardos ed. Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems, in: Proceedings Univ. Paris Ⅹ Ⅲ Villetaneuse, vol. 782, Springer Verlag, 1978, pp. 42-60.

[121] Marder B, Weitzner H. A bifurcation problem in E-layer equilibria[J]. Plasms Phys. (1970), 12: 435-445.

[122] Chehab J-P, Temam R. Incremental unknowns for solving nonlinear eigenvalue problem: New multiresolution methods[J]. Numer. Methods PartialDifferential Equations (1995), 11 (3): 199-228.

[123] 王洋,伍渝江,付军. 一类弱非线性方程组的 Picard-MHSS 迭代方法[J]. 计算数学,(2014),36(3),291-302.

[124] 王洋,伍渝江. 一类弱非线性方程组的两参数不精确 Picard 迭代方法[J]. 高等学校计算数学学报,(2014),36(4): 370-384.

[125] 王洋,付军,马维元. 非埃尔米特正定线性系统的预条件 NSS 方法[J]. 山东大学学报(理学版),(2012),47(6): 57-62.

[126] 王洋. 求解一类非线性方程组的 Newton-PLHSS 方法[J]. 山东大学学报(理学版),(2012),47(10): 96-102.

[127] 王洋. Newton-LHSS 后退方法及其全局收敛性的研究[J]. 河南大学学报(自然科学版),(2012),42(6): 694-698.

[128] 王洋. 基于超松弛迭代的 MHSS 加速方法[J]. 山东大学学报(理学版),(2016),51(8): 61-65.

[129] Poirier B. Efficient preconditioning scheme for block partitioned matrices with structured

sparsity[J]. Numerical Linear Algebra with Applications,2000,7: 715-726.

[130] Feriani A,Perotti F,Simoncini V. Iterative system solvers for the frequency Analysis of linear mechanical systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering[J]. 2000,190: 1719-1739.

[131] Stewart G W. Conjugate direction methods for solving systems of linear equations[J]. Numer. Math. 1973,21: 284-297.

[132] Axelsson O and Kucherov A. Real valued iterative methods for solving complex symmetric linear systems[J]. Numer. Linear Alebra Appl. (2000),7: 197-218.

[133] Van U. Rienen. Numerical methods in computational electrodynamics, Linear Systems in Practical App. (2001),12.

[134] Day D,Heroux M A. Solving complex-valued linear systems via equivalent real formulations[J]. SIAM J. Sci. Comput. (2001),23: 480-498.

[135] Varga R. Matrix iterative analysis[M]. New York and London: Springer,2000.

[136] 胡甲维. 一类具有非 Hermitie 正定 Jacobi 矩阵的非线性方程组的 Newton-GHSS 方法[D]. 苏州：苏州大学,2014.

[137] 王洋. 增量未知元方法及其预处理迭代算法的若干问题与应用[D]. 兰州：兰州大学,2010.

[138] Eisenstat S C,Walker H F. Choosing the forcing term in an inexact Newton methods[J],SIAM Journal on Scientific Computing[J]. 1996,17(1),16-32.

[139] Pernice M,Walker H F. NITSOL: A Newton iterative solver for nonlinear systems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,(1998),19: 302-318.

[140] Kelley. Iterative methods for linear and nonlinear equations[M]. Philadephia,SIAM,1995.

[141] Aranson I S,Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Rev. Mod. Phys. ,2002,74: 99-143.

[142] 王坤. 两类非 Hermitian 线性方程组的迭代法研究[D]. 青岛：中国海洋大学,2012.

[143] Guo Xiaoxia,Wang Shen. Modified HSS iteration methods for a class of non-Hermitian Positive-definite linear systems[J]. Applied Mathematics and Computation(2012),218: 10122-10128.